COMPLEMENTO

DE LA

ARITMÉTICA DE NIÑOS,

ESCRITA PARA USO DE LAS ESCUELAS DEL REYNO.

POR

DON JOSÉ MARIANO VALLEJO.

Contiene un *nuevo método, seguro y general, para resolver toda clase de cuestiones, que se refieren á números, y encontrar las raices reales de las ecuaciones numéricas de todos los grados*; aun las que se resisten á cuantos medios y recursos ofrecen los tratados mas sublimes de las Matemáticas, sin mas ausilio ni conocimientos, que los contenidos en la quinta edicion de la espresada Aritmética.

Dispuesto en forma de diálogo, por el mismo autor.



MADRID:
Imprenta GARRASAYAZA, *propia del mismo autor.*
Calle de la Flor Alta, número 9.
Febrero 1836.

Nisi utile est quod agimus, stulta est gloria.

Si no es útil lo que hacemos, neciamente nos gloriamos.

PRÓLOGO.

En la tercera edicion de mi *Compendio de Matemáticas*, he publicado mi *nuevo método para encontrar las raices reales de todas las ecuaciones numéricas, cualquiera que sea su grado y complicacion*; y el objeto de esta obrita es hacer partícipes de este descubrimiento á todos los Españoles. En ella, segun prometo al fin del 2.° tomo de la citada edicion del espresado Compendio, espongo esta doctrina al alcance de toda clase de personas, y aun de los niños de las escuelas, sin suponer mas conocimientos, que los contenidos en la quinta edicion de mi Aritmética de Niños.

Consta de tres partes ó capítulos: en el 1.° reuno cuantas nociones son conducentes para que sirvan como de preliminares ó puente de comunicacion entre dicha Aritmética y este nuevo método. En el 2.° manifiesto dicho maravillosísimo procedimiento, por el cual se consigue lo que hasta ahora se ha resistido aun á los tratados mas sublimes de las Matemáticas. Se resuelven en ella toda clase de cuestiones, presentando su plantéo en algunas, á fin de que los Discípulos se acostumbren tambien á cifrarlas en ecuaciones. En seguida, rectifico la resolucion de una de las ecuaciones que contiene el Apén-

dice puesto al fin del 2.° tomo del mencionado Compendio. Y para dar ejemplo de todo, enseño á formar una ecuacion, que es la (ec. 14 § 327), de modo que envuelva todas las dificultades, que mas embarazan en los métodos anteriores al mio; y despues la resuelvo completamente; con lo cual parece debían terminar aquí mis investigaciones. Sin embargo, análogamente á lo hecho en el mencionado Apéndice, para perpetuar las circunstancias de las personas, que han cooperado á este trabajo, resuelvo, ademas de las espresadas cuestiones, una ecuacion del grado *once* para fijar la edad de *D. Nicanor de la Fuente* y *D. Joaquin Pavía*, segun espreso en la página 264 nota, del primer tomo del citado *Compendio*; otra del grado 13 para fijar la edad de *D. Domingo Soler*; otra del grado 14 para fijar la de *D. Hermenegildo Gutierrez*; otra del grado 18 para fijar la del principal cooperador *D. Agustin Pascual*; y la última ecuacion, que me proponía resolver, era la del grado 45, porque esta era mi edad el año de 1825 al componer mi *Teoría de la Lectura*, que contiene, segun mi modo de ver, el descubrimiento mas importante. Pero, habiendo llegado á Madrid mi muy estimado condiscípulo y amigo el Sr. D. José Musso y Valiente, Gobernador Civíl que ha sido de Murcia y de Sevilla, y de quien hago la debida mencion honorífica en el cap. 5.° del libro 8.° de mi *Tratado sobre el movimiento y aplicaciones de las aguas*, me manifestó deséos de imponerse en este nuevo método; y en el acto nos pusimos á resolver la ecuacion del grado 45, que es la (ec. 19 § 357), habiéndolo conseguido empleando solo tres conferencias. Visto por mí que no le ha-

bía desagradado, le invité á que resolviésemos otra del grado 50 para fijar su edad; y habiéndose conformado, resolvimos empleando solo dos conferencias, la (ec. 20 § 359).

En el capítulo 3.° deseando que este descubrimiento no sea estéril para los usos de la vida, y aplicaciones útiles al Comercio, Estadística y Aritmética política é industrial, me contraigo á resolver por este método los problemas de interés compuesto, y algunas cuestiones de anualidades; y con el fin de acabar de confirmar la generalidad que tiene este nuevo método, y hacer ver que no reconoce limitacion alguna, rogué á mi amigo *D. Alejandro de Bengoechea*, Profesor de Matemáticas en el Consulado de Madrid, y en el colegio de Humanidades de la calle de la Madera, que se sirviese prepararme algunas cuestiones á que se pudiese aplicar mi método con preferencia á los demas; y habiéndome presentado algunas, elegimos de comun acuerdo las que conducen á las (ecs. 25 y 26), y entre los dos las resolvimos en la forma que se vé (§§ 391, 392, 393 y 394).

Aquí terminaría este prólogo, si al ocuparme de esta materia, no hubiera llegado á mis manos una obrita, que corrobora cuanto me he propuesto en mi conducta privada, pública, científica é industrial; pues habiendo elegido en todas ocasiones por polos de mi proceder, la sencillez y utilidad, ha sido mi objeto el simplificar, difundir, generalizar y popularizar los conocimientos útiles en todos tiempos y circunstancias; y en prueba de que el rumbo que á ello me ha conducido, no ha sido equivocado, copiaré aquí lo que dice sobre este particular una de las obras

que corren con mas crédito en Europa. Por varios parages de las mias, resulta: que el gran poder y riqueza á que ha llegado la Gran Bretaña en estos últimos años, nace de haber proporcionado á la clase obrera los conocimientos que yo he tratado de propagar entre los Españoles. En efectó, una de las obras publicadas en Inglaterra, sobre tan importante materia, tiene por título: *Elementos de Filosofía natural, que encierra un gran número de desarrollos nuevos y de aplicaciones prácticas al uso de las personas de letras, de los Médicos y de los sugetos ménos versados en las Matemáticas, por Neil Arnott.* En Inglaterra se lée mucho; y por lo mismo las ediciones de las obras, se repiten con mucha frecuencia. La 4.ª edicion de esta obra se ha traducido del Inglés al Francés en 1830 por J. R., enriquecida con notas y adiciones matemáticas. En la página X de su introduccion, se dice: «Pero una mudanza mas importante aun, que «los descubrimientos científicos se verifica de dia «en dia; esta mudanza, que depende de los «descubrimientos, es distinta de ellos, sin embar«go, y merece que se considere aparte. Quere«mos hablar de la *difusion de los conocimientos* «*adquiridos, de su propagacion en las masas.* Es«tos conocimientos, encerrados en otro tiempo, «entre muros de Universidades ó Conventos, es«taban ademas consignados en colecciones escri«tas en lenguas muertas; ó si alguna vez se em«pleaba el lenguage usual, estaban presentadas «bajo puntos de vista, de tal modo singulares, «que no era dado, sinó á un muy pequeño núme«ro de individuos el comprenderlos; desde entón-

ces, considerando toda la raza humana como un ser intelectual único, formado de la masa de las inteligencias individuales, se podría decir, que el ejercicio no se habia concedido, sinó á un muy pequeño número de sus facultades, y que lo mas frecuentemente, ellas permanecían ociosas, á falta de motivos suficientes para entrar en accion. No es necesario pues, admirarse de la lentitud de los progresos de la ciencia y de la razon, en estos desgraciados siglos, ni de los males que fueron la consecuencia de la ignorancia de las masas ó de sus preocupaciones. No sucede lo mismo en el dia; las barreras que impedían acercarse á los tesoros de la inteligencia, se han roto para siempre; un diluvio de idéas sanas inunda la tierra entera; las antiguas instituciones ceden de dia en dia el puesto á instituciones mas sabias; los establecimientos envejecidos, se plegan en fin al espíritu y á las necesidades del siglo; nuevos establecimientos se crean; las escuelas primarias adoptan métodos de instruccion mas seguros, y mas prontos; y cada dia buenas obras vienen á transformar la *cuña de fuego*, en una escuela donde es permitido á cualquiera tomar su parte del buen sentido, ó de los descubrimientos de la masa social. Se forma pues, una *opinion pública é ilustrada*, que apresura, dirige la marcha de las artes y de las ciencias, y que, ayudada de la mas poderosa máquina humana, la *prensa*, se apodera rápidamente del poder supremo, para no dejarle escapar, que, bien pronto en fin, dueña del timon, dirigirá la nave para el mayor bien del mayor número. »

En estos pocos renglones se hallan delineados todos los pasos que yo he dado, para contribuir á la ilustracion de mis compatriotas, en los ramos que han tenido mas conexion con mis circunstancias; y en estos renglones se halla descrita mi marcha casi de un modo idéntico al que se ha verificado. Y con solo ver el catálogo de mis obras, no se podrá ménos de conocer, que he procurado atajar el mal en su orígen, y que, conociendo la tendencia del siglo, desde luego he tratado de cooperar á satisfacer sus mas urgentes é indispensables necesidades.

Advertencia.

Como esta obrita es continuacion de mi *Aritmética de Niños*, los párrafos siguen su numeracion, y todas las citas se refieren á la mencionada Aritmética.

COMPLEMENTO

DE LA

ARITMÉTICA DE NIÑOS.

CAPÍTULO PRIMERO.

Nociones preliminares, que sirven para enlazar la doctrina de la Aritmética de Niños, con el nuevo método de hallar las raices reales de las ecuaciones numéricas de todos los grados.

263 *Pregunto.* ¿Cuál es el objeto de este complemento?

Respondo. Generalizar y popularizar el modo de resolver las cuestiones y ecuaciones numéricas de todos los grados, hallando todas sus raices reales, aun en las que se resisten á cuantos métodos han inventado los Matemáticos; y su contenido se debe considerar como uno de los descubrimientos de mayor importancia. Ya en el *Tratado sobre el movimiento y aplicaciones de las aguas*, se hallan resueltas, por un medio análogo, ecuaciones que no se pueden resolver por ninguno de los procedimientos conocidos; y en la edicion tercera del *Compendio de Matemáticas*, se halla desenvuelto muy elementalmente, para los que estudien dicha obra: resolviendo ecuaciones de tal complicacion, que no han ocurrido jamás como resolubles á la consideracion de los mas profundos y célebres Analistas.

264 *P.* ¿De qué modo se van á resolver aquí dichas cuestiones y ecuaciones?

R. Las vamos á resolver por un método nuevo y seguro, pero desnudo de todo aparato científico; y de tal modo simplificado, que se halle á los alcances de toda clase de personas, inclusos los Niños de las Escuelas, sin introducir ninguna idéa que pueda estar demas, ni omitir por otra parte nada de lo que sea conducente.

265 *P.* ¿Y con qué órden se procederá para que una clase de personas de tan escasos conocimientos, ejecuten lo que no pueden hacer los mas célebres Matemáticos por los métodos existentes, ni aun empleando cien veces mas tiempo, fatigas y penalidades?

R. Dividiendo esta obrita en tres partes ó capítulos; en la 1.ª se reunen cuantas nociones son conducentes para que sirvan como de preliminares ó puente de comunicacion entre la Aritmética de Niños y este nuevo método. En la 2.ª se manifiesta dicho maravillosísimo procedimiento, por él cual se consigue lo que hasta ahora se ha resistido aun á los tratados mas sublimes de las Matemáticas. Se resuelven muchas, presentando el plantéo en varias, para que los Discípulos se acostumbren tambien á plantearlas. En seguida, se rectifica la resolucion de una de las ecuaciones que contiene el Apéndice puesto al fin del segundo tomo del mencionado *Compendio*. Y para dar ejemplo de todo, se enseña á formar la ecuacion de modo que envuelva todas las dificultades, que mas embarazan en los métodos anteriores á este; y despues se resuelve completamente, con lo cual parece debían terminar aquí estas investigaciones. Sin embargo, análogamente á lo hecho en el mencionado Apéndice, para perpetuar las circunstancias de las personas que han cooperado á este trabajo, se resuelven, ademas de las espresadas cuestiones, una ecuacion del grado 11; otra del 13; otra del 14; otra del 18; otra del 45 y otra del 50. En la 3.ª parte, con el fin de que este descubrimiento no sea estéril para los usos de la vida, y aplicaciones útiles al Comercio, Estadística, y Aritmética política é industrial, se pasa á resolver por

este método las cuestiones de interes compuesto, ciertas cuestiones de anualidades, que, ó no se pueden resolver sinó por logaritmos ó por otros métodos sublimes y complicados, ó por tablas hechas de antemano, ó que no se pueden resolver por ningun otro procedimiento.

266 *P.* ¿Cómo me daréis las nociones convenientes para enlazar la doctrina contenida en la Aritmética de Niños, con los procedimientos de este nuevo método?

R. Observando que, para resolver una cuestion cualquiera, hay que vencer dos dificultades, que hasta cierto punto son independientes entre sí. Una es el conocer la operacion ú operaciones que se deben practicar para encontrar lo que se pretende; y otra, el saber ejecutar dichas operaciones. Por esta causa, desde la primera edicion de la citada Aritmética, se ha introducido el poner, en seguida de cada operacion, los casos en que se debe aplicar á las cuestiones que ocurren en la sociedad; pero como á veces no basta una, ni dos operaciones para resolver una sola cuestion, sinó que se necesita para ello el concurso de varias, que se mezclan las unas con las otras y se repiten entre sí, verificándose tambien, que la cuestion no arroja en muchas ocasiones suficiente luz para saber el rumbo que se debe tomar, es necesario entónces redoblar mas nuestros esfuerzos.

267 *P.* ¿De qué modo se podrá formar una justa idéa sobre tan interesante punto?

R. Resolviendo algunas cuestiones que conduzcan á ilustrar esta materia, y sirvan de base ó fundamento á lo que intentamos dar á conocer.

1.ª *Hallar un número que, sumado con ocho, dé quince.* Veamos por qué medio, solo con el raciocinio resolvemos esta cuestion.

Puesto que el número propuesto, junto con el 8, han de componer el 15, debemos inferir, que si del 15 restamos 8, nos quedará el número que buscamos; y como quitando el 8 del 15, nos resulta 7, inferimos que 7 es el número buscado; y en

efecto, 7 y 8 componen 15, como exigía la cuestion.

2.ª *La edad de un padre, unida con la de un hijo suyo, componen* 50 *años; se sabe que cuando el hijo nació, tenia el padre* 30 *años; y se deséa saber cual era la edad del padre, y cual la del hijo en el momento en que se habla.* No sabemos cual era la edad del uno ni del otro; pero vamos á deducirlas de los mismos datos que se conocen. Cualquiera que sea la edad del hijo, *la del padre se compondrá de la del hijo, y ademas de los* 30 *años que tenia el padre cuando nació su hijo*; luego las edades juntas de ambos equivaldrán á *dos veces la del hijo mas* 30 *años*; y como entre las dos edades han de componer 50 años, resulta, que *dos veces la edad del hijo mas* 30 *han de componer* 50 *años*; luego, si de 50 años, quitamos 30, *la resta* 20 *equivaldrá á dos veces la edad del hijo*; por lo que, *si tomamos la mitad de* 20, *que es* 10, esta será la edad del hijo. Y como el padre tenía 30 años mas, será 40 la edad de este; y ambas edades componen 50, como exigía la cuestion; luego esta queda resuelta.

268 *P.* Se ha discurrido algun medio para resolver estas cuestiones con mas sencillez y ménos fatiga?

R. Sí señor: como la capacidad humana es tan limitada, resulta, que, á pesar de ser estas cuestiones de las mas sencillas, que se pueden proponer, se necesita una cierta tension de espíritu para conservar en la memoria todos los raciocinios que se deben hacer; por lo cual, es de la mayor importancia el proporcionarse signos abreviados para con su auxilio poder escribir dichos raciocinios. Esto es lo que se consigue con los signos $+, -, \times, :$ é $=$, que ya sabemos (§§ 45, 52, 63 y 81 Ar. de N.), y algunos pocos mas que darémos á conocer; y se llama *plantear* la cuestion ó problema *el acto de escribir con estos signos, y con algunas letras para representar los números que se buscan, y los números que entran en la cuestion, todas las condiciones del problema*: debiendo advertir que, al introducir las letras en los cálculos,

se consideran como representando, no precisamente números determinados, sinó lo que se llama en general *cantidad, que es todo lo que puede recibir aumento ó diminucion, ó todo lo que puede ser mayor ó menor*, sin fijarle precisamente valor determinado, como tres, cinco, mil &c.

269 *P.* De qué letras se usa para espresar los números ó cantídades qué se buscan?

R. De las últimas del alfabeto, pero la que en general, se usa mas, es la x; y estas letras reciben el nombre de *incógnitas*, porque nos son desconocidas hasta que por las operaciones de cálculo se llegan á determinar. Los procedimientos, que se empléan para encontrar el valor de la incógnita, es lo que se caracteriza con la frase de *despejar la incógnita.*

270 *P.* ¿Hay reglas generales, é independientes del talento del calculador, para plantear una cuestion ó problema?

R. No señor: pero sin embargo, son bastante seguras las de practicar una rigurosa traduccion del lenguage comun al lenguage escrito con los signos y letras que acabamos de espresar; y así, para conseguirlo con alguna facilidad, se tendrá entendido; que las palabras *sumado, agregado, aumentado en, etc.* y las que vienen á significar lo mismo, conducen á poner el signo $+$; las *restado de, quitado, disminuido en etc.* y sus análogas, quedan traducidas poniendo el signo $-$; las *multiplicado por, tantas veces mayor etc.* conducen á poner el signo $\times$; *las dividido por, tantas veces menor etc.* conducen al signo de dividir, que son dos puntos en esta forma (:), ó la raya de la division; las *tal potencia etc.* al de elevar á potencias, que se indican en general (223), poniendo á la derecha del número ó letra, el número que esprese la potencia, un poquito mas alto; y las *estraer tal raiz etc.* al signo radical, que viene á tener esta forma $\sqrt{}$; entre las piernas se pone un número que esprese el grado de la raiz; y debajo se pone la canti-

dad, letra ó número. Las palabras *duplo, triplo etc.* conducen á escribir un 2, un 3, &c. ántes de la incógnita ó número que se espresa; y las palabras *mitad, tercio, cuarta parte*, ó cualquier otro número partitivo conducen á escribir los números 2, 3, 4, &c. dividiendo á la incógnita; pero es mejor poner este número por divisor á la unidad, cuando no haya otro número. Y todo lo que multiplique á la incógnita ó á cualquier potencia suya, sea en forma de entero, de fraccion ó quebrado &c. se llama *coeficiente*. Y las palabras *dé, componga, resulte, salga*, y todas sus equivalentes, quedan traducidas escribiendo el signo =. Con el fin de presentar un ejemplo, voy á plantear la primera cuestion (267).

En el momento que oigo, que se pide *hallar un número*, desde aquel mismo instante, debo decir interiormente *ya le tengo*: y supongo que sea x. Despues dice la condicion, que este número se ha de *sumar con ocho*; y como la palabra *sumado* se escribe con el signo +, y la palabra *ocho* con el guarismo 8, resulta que dicha condicion queda escrita de este modo $x+8$.

Sigue despues en el enunciado, *dé quince*; la palabra *dé* conduce al signo =, y la palabra *quince* á escribir con guarismos el número 15: luego dicha cuestion queda planteada en esta forma $x+8=15$.

Esto es lo que en Matemáticas se llama *ecuacion*, que es *cualquier espresion en que entra el signo* =, que se lee *igual*. Todo lo que hay á la izquierda del espresado signo, se llama *primer miembro* de la ecuacion, y todo lo que hay á la derecha se llama *segundo miembro*. Cada uno de los números ó cantidades separadas de otras por el signo + ó por el signo —, se llaman *términos*; por manera, que el primer miembro consta de dos términos, á saber el x y el 8. El segundo miembro consta de solo un término, que es el 15. Las ecuaciones se dividen en *grados*, segun sea la mayor potencia de la icógnita, que en ellas se contenga; lo que se conoce en el mayor número, que se vé

á la derecha de la incógnita un poco mas elevado, el cual se llama, como ya hemos dicho (223), *esponente de la potencia*; y esta ecuacion es del *primer grado*, porque en el hecho de no llevar esponentè la incógnita, se sobreentiende que lleva el esponente 1.

Para plantear la segunda cuestion, observaré, que si se llama x la edad del hijo, como el padre ha de tener 30 años mas, la edad del padre se compondrà de la del hijo, que es x, y ademas de 30; luego será $x+30$; y entre las dos edades juntas compondrán la suma de estas dos, á saber; de x y de $x+30$, y dicha suma quedará espresada por $x+x+30$; y como estas dos edades han de componer 50 años, resulta que deberé poner despues el signo $=$, y luego el número 50: con lo cual quedará planteado el problema èn la ecuacion

$$x+x+30=50.$$

271 *P.* Cuándo un problema se halla planteado ¿hay reglas generales para resolverle?

R. Cuando las ecuaciones son del 1.º y 2.º grado, sí señor; pero desde el tercer grado en adelante, los procedimientos, que hasta el presente han proporcionado los Matemáticos, son tan complicados, difíciles y espinosos, que viene á ser lo mismo que si no los hubiera; y ademas estriban en principios tan sublimes y elevados, que únicamente los Analistas mas profundos se hallan con los conocimientos necesarios para emprender y ejecutar la espresada resolucion. Mas, en el método que nos ocupa, solo se necesitan tener presentes, ademas de lo espuesto en dicha Aritmética de Niños, las siguientes advertencias: 1.ª *que se llama término, como ya hemos indicado* (270), á *todo número, letra, cantidad ó grupo de letras solas ó de letras y números, que se halla separado de otro número, letra, cantidad ó grupo de letras, ó de letras y números, por medio del signo* $+$ *ó del signo* $-$. 2.ª *Que un término se puede pasar de un miembro al otro de una ecuacion sin mas que mudarle su*

signo; esto es, si en el primer miembro tiene el signo +, se le puede pasar al segundo con el —; y si está con el —, pasarle con el signo +. Del mismo modo, si está en el segundo con el signo + ó el —, se pasa al primero con el — ó con el +. Asi es, que la ecuacion $x+8=15$, podrémos ponerla de este modo $x=15-8$; y como quitando el 8 del 15 quedan 7, se tiene $x=7$; donde vemos con cuanta facilidad y poco trabajo hemos hallado el espresado número, que es lo que se llama *raiz* de la ecuacion.

3.ª *Cuando la incógnita, ya por sí sola, ya con igual esponente, se halla en varios términos, todos ellos se pueden reducir á uno solo, sumando los coeficientes cuando tengan un mismo signo, ó restándolos cuando tengan diverso signo, y poniendo á la resta el signo del término que tenga mayor coeficiente.* Por esta causa, como en la ecuacion $x+x+30=50$, vemos repetida en dos términos la x, podemos espresarla con mas sencillez, poniendo $2x$ en vez de $x+x$; porque una cosa cualquiera, unida á la misma cosa, hace dos veces la misma cosa. Y así, una x reunida con otra x componen dos veces la misma x, que es lo que espresa $2x$; y con esto la mencionada ecuacion se reduce á $2x+30=50$; que trasladado el 30 al segundo miembro mudando su signo y reduciendo, se tiene $2x=50-30=20$.

4.ª *Cuando un número se halla por coeficiente, ó lo que es lo mismo, multiplica á la incógnita, que es lo que hace todo coeficiente, se puede quitar, y que quede sola la x ó la potencia de la incógnita que contenga el término, dividiendo toda la ecuacion por dicho coeficiente.* Así es, que, si dividimos por 2 la ecuacion anterior, para lo cual, no hay mas que suprimirlo en el primer miembro, se tiene $x=\frac{20}{2}=10$. Donde vemos, que nos resulta 10, para la edad del hijo, del mismo modo que ántes; y añadiendo 30 que es la edad que el padre le llevaba, resulta para este la edad de $10+30=40$, como ántes.

5.ª *Resulta mayor sencillez, pasando todos los términos al primer miembro de la ecuacion, y que el segundo sea cero; y tambien conviene escribirla, de modo que el primer término sea el que contenga á la incógnita con el mayor esponente; despues el que sigue con el esponente inferior mas aproximado,* y así sucesivamente, hasta poner por último término aquel en que no hay incógnita; y cuando se tiene la ecuacion dispuesta en esta forma, se dice que está *ordenada*. Si el término de mayor esponente, que es lo que se llama *primer término*, resultare con coeficiente, es preciso quitárselo para emplear todos los métodos de resolucion, incluso el que vamos á manifestar; y esta supresion del coeficiente se ejecuta dividiendo toda la ecuacion, ó los coeficientes de todos sus términos por el espresado del primero, en cuyo caso se dice que le ecuacion está *preparada*.

6.ª Se llama *raiz de una ecuacion todo número, valor ó espresion*, cualquiera que sea su forma y naturaleza, *que sustituido por la incógnita en la ecuacion, resulta el primer miembro igual con el segundo*; y cuando la ecuacion está preparada, podemos decir, que se llama *raiz de la ecuacion, todo número, valor ó espresion*, cualquiera que sea su forma y naturaleza, *que sustituido por la incógnita, reduce á cero su primer miembro*.

7.ª *Si el primer miembro de una ecuacion, se divide por la incógnita, acompañada de la raiz con un signo opuesto, da cociente exacto.*

8.ª Recíprocamente, *si el primer miembro de una ecuacion preparada es divisible por la incógnita, acompañada de un número, cantidad, valor ó espresion, este número, cantidad, valor ó espresion, tomado con un signo contrario al que tenia en el divisor, es raiz exacta de la ecuacion propuesta.*

9.ª Todo número, valor ó espresion, que sustituido por la incógnita en una ecuacion preparada, no reduzca á cero el primer miembro, no es *raiz* de dicha ecuacion; y dividiendo el mencionado primer

miembro por la incógnita; acompañada de dicho número, valor ó espresion con un signo contrario, no dará cociente exacto; pero se verificará, que *el valor en que se convierte dicho primer miembro por la mencionada sustitucion, es igual á la resta que resulta de dividir dicho primer miembro por la incógnita, acompañada de dicho número, valor ó espresion con un signo cantrario.*

Con las advertencias que acabamos de hacer, y sin ningun otro conocimiento de los demas tratados de las Matemáticas, podemos hallar una de las raices de toda ecuacion: mas *como cada ecuacion puede tener tantas raices como unidades hay en el mayor esponente de la incógnita*, si se quieren sacar todas las raices efectivas y útiles, que se llaman *reales*, como por este método se consigue en todos los casos, es indispensable dar á conocer aun otras circunstancias.

272 *P.* ¿Hay casos en que los signos proporcionan medios de escríbir frases enteras, con mas concision, sencillez y claridad?

R. Sí señor; y para darlos á conocer, observarémos que en los usos ordinarios de la vida, se suple con palabras el modo con que los números que se dan, y los que se obtienen por los procedimientos de cálculo, influyen en los resultados; mas como ahora tratamos de fijar del modo mas claro y conciso, todo lo concerniente á las cuestiones, debemos manifestar una simplificacion, con que se escriben ciertas frases del lenguage vulgar por medio de los signos: lo cual es de la mayor importancia. Ante todas cosas, debe observarse, que, al hallar un resultado, solo debemos tener en consideracion, números que influyen al fin que nos proponemos, y números que influyen al fin contrario; pues si hubiese algun número en la cuestion, que no influyese en ella, este número era indiferente para el resultado, y no se debe tener en consideracion. Los números que cooperan al fin que se propone el calculador, reciben el nombre de *números positivos*, y se señalan con el signo +, porque tratan de aumentar

lo que se busca; y los números, que cooperan al fin opuesto al que se propone el calculador, se llaman *números negativos*; y se señalan con el signo —, porque su efecto es disminuir el resultado. Para dar á conocer la existencia, naturaleza é influjo en las cuestiones, de los números negativos, nos propondrémos 1.º la siguiente

CUESTION. *Averiguar cuanto ahorra un labrador al año, en el concepto de que, por los asientos que lleva, resulta, que el trigo le produce 4000 reales; la cebada 3000; y el centeno 1000; que por el arrendamiento de las tierras paga 3000 rs.; que el aceite le produce 5000; que tiene que pagar por contribuciones 4000; que el vino le produce 2500; que la manutencion de su casa y familia le cuesta 5000 rs.; que el salario de sus dependientes asciende á 2000; que la cosecha de seda le produce 2000 rs.; y que la manutencion de un hijo, á quien da carrera, le cuesta 2500 rs.*

El método, que ordinariamente se empléa, para resolver esta clase de cuestiones, es reunir en una sola partida todos los ingresos; y en otra partida todos los desembolsos; y despues, si los ingresos ascienden á mas que los desembolsos, se restan estos de aquellos, y la diferencia espresa el *ahorro*. Si los desembolsos ascienden á tanto como los ingresos, no hay ahorro ninguno; pero si los desembolsos ascienden á mas que los ingresos, no solo no hay ahorro, sinó que hay un atraso, esto es, que el sugeto *en vez de ahorrar se empeña todos los años*; y para averiguar la cantidad anual en que se empeña, se resta la suma de los ingresos de la suma de los desembolsos, y se obtiene el valor de lo que se atrasa ó empeña cada año.

Para resolver por este método la presente cuestion, lo harémos en esta forma:

Ingresos.		*Desembolsos.*	
Trigo..............	4000	Arrendamientos......	3000
Cebada	3000	Contribuciones........	4000
Centeno...........	1000	Gastos de su casa....	5000
Aceyte..............	5000	Carrera de su hijo...	2500
Vino	2500	Salario de sus dependientes............	2000
Seda................	2000		
Total.....	17500	Total.......	16500

Total de ingresos....................	17500
Total de desembolsos ó gastos..	16500
Resulta que el ahorro anual es....	1000.

Luego el espresado labrador *ahorra mil reales al año.*

Escribamos esta cuestion por medio de los signos, atendiendo á lo que acabamos de decir, de los *números positivos y negativos.* Y como lo primero que hay apuntado, segun resulta de los asientos, es el trigo, que produce 4000 rs. y este número coopera á ahorrar, lo tendré escrito poniendo +4000; pero puedo omitir el signo + por estar al principio de cálculo ó escritura, y nada me importa, para obtener el resultado, que sea trigo ó cualquiera otra cosa; y lo único que interesa es espresar que estos 4000 rs. cooperan al fin que me propongo; pues por lo demas, la operacion debe hacerse en abstracto, esto es, no contrayéndose á especie determinada. Luego sigue, que la cebada le produce 3000; y como esto coopera tambien al fin que me propongo, que es averiguar los ahorros, pondré despues del 4000 el +3000, y tendré 4000+3000, no pudiendo omitir el signo + del +3000, por estar ya enmedio de cálculo. Sigue luego, que el *centeno produce* 1000, y por la misma razon pongo +1000 á continuacion, y tengo ya 4000+3000+1000.

En seguida, dicen los asientos, apuntes ó datos,

que *por el arrendamiento de las tierras* paga 3000 reales; y como esto no contribuye al fin propuesto de *ahorrar*, sinó al fin opuesto de *atrasarse*; pues mientras mas pague, ménos ahorra; pongo 3000 á continuacion de lo ya escrito; pero precedido del signo —, y resulta lo siguiente 4000+3000+1000—3000.

Despues sigue, que *el aceyte le produce* 5000 *reales*; y como esto coopera á los ahorros que busco, pongo +5000. Por las mismas razones, la frase *tiene que pagar por contribuciones* 4000 *reales*, la escribiré con —4000 reales. La frase que *el vino le produce* 2500 *reales*, la escribiré con +2500; que la manutencion de su familia le cuesta 5000, la escribiré con —5000; que *el salario de los dependientes le cuesta* 2000 *reales*, se escribe con —2000; *que la cosecha de seda le rinde* 2000 *reales*, quedará escrita con +2000; *que la manutencion de un hijo, á quien da carrera le cuesta* 2500 *reales*, queda escrita con —2500. En términos, que toda la cuestion queda escrita con signos y guarismos del modo siguiente

4000+3000+1000—3000+5000—4000+2500....
—5000+2000—2500,

y desde luego advertimos, que aquí la tenemos escrita con mas sencillez que en el enunciado por palabras.

Al que por primera vez la vea, podrá suceder, que nó le parezca tan clara; pero á la segunda ó tercera vez que la vuelva á releer, ya será otra cosa; porque en ella no hay nada que pueda distraer del objeto; y solo contiene el número, y si coopera al fin de los ahorros ó á lo contrario, que es lo que se necesita; y el hallarse desnuda de todas las demas circunstancias, como si el número proviene de trigo, cebada, centeno, arrendamiento &c. hace que nos cause menor distraccion. Pero, ademas, resultan otras ventajas en su resolucion; pues observando que el primer número es 4000, ó +4000, esto es, que hay 4000 reales á favor; y viendo despues, que el sesto número ó partida es —4000, quiere decir, que de estas dos partidas,

la una destruye ó aniquila el efecto de la otra; esto es, que son lo que generalmente se llama *entrada por salida*, ó *cargo y descárgo*; pues cuando hay un mismo número con diferente signo, el uno causa el efecto contrario del otro, y su conjunto no influye á favor ni en contra del resultado; por lo cual, se pueden borrar y que desaparezcan; lo que se llama *destruirse*. Por la misma razon se destruyen entre sí el +3000 con el —3000; el +5000, con el —5000; el +2500, con el —2500; el —2000 con el +2000; y queda solo 1000 reales.

Lo cual indica, que el ahorro al año es 1000 rs., como se halló antes; pero aquí lo hemos sacado sin practicar materialmente ninguna operacion.

2.° Supongamos á este labrador en un segundo estado, cual es el de tener, ademas de las circunstancias espresadas, una hija en un Colegio, y que *paga por su educacion* 1000 *reales al año*. En este caso, añadiendo estos 1000 reales con el signo —, se destruirían con los 1000 que ántes quedaban; y entónces el ahorro era 0, esto es, no ahorraba ni se empeñaba.

3.° Supongamos á este mismo labrador en el caso de haber perdido un pleito, y tener que pagar, ademas de todo lo anterior, un censo de 500 reales al año. Entónces, á continuacion de las partidas anteriores, escribiría —500; y hecha la destruccion de todo el conjunto, solo quedaba —500; lo cual nos quería decir, que el ahorro es —500 reales, esto es, *quinientos reales al contrario de ahorrar*; y como lo contrario de ahorrar, *es empeñarse ó atrasarse*, resulta, que la respuesta de la cuestion es, que *este sugeto, en vez de ahorrar cada año, se empeña ó atrasa en* 500 *reales*. Por el sistema ordinario, hubiéra debido añadir, á las partidas, que forman los desembolsos, los 1000 reales de la educacion de su hija, y los 500 reales del censo; y entónces la suma de los desembolsos hubiera ascendido á 18000 reales, y como la de los ingresos solo era 17500, resultaba; que no se podían restar los desembolsos de los ingresos,

por no alcanzar estos á cubrir á aquellos; y haciéndolo al contrario, esto es, restando la suma de los ingresos, de la suma de los desembolsos, resulta que los desembolsos ascienden á quinientos reales mas que los ingresos; y por consiguiente el labrador, en vez de ahorrar, se atrasa ó empeña cada año en *quinientos reales*. Por manera, que los métodos ordinarios responden á la cuestion ó pregunta. *¿Cuánto ahorra este labrador al año?* del modo siguiente: *este labrador no solo no ahorra, sinó que se atrasa ó empeña en quinientos reales*. Y el lenguage matemático responde á la misma pregunta del modo siguiente: *ahorra* —500 *reales*. Donde aparece, que el lenguage matemático responde con mas brevedad, concision y aun claridad.

4.° Supongamos á este labrador en un cuarto estado, cual sería, si ademas de las condiciones espresadas, hubiera resultado por los apuntes ó asientos, que á un aperador, que se le había inutilizado en sus haciendas, tenía que satisfacerle 300 reales al año; entónces deberíamos escribir —300 á continuacion de todo; y hechas las simplificaciones y destrucciones, hubiera quedado solamente lo que sigue, —500—300. Esto quiere decir, que había una partida de 500 reales, que influía en lo contrario de ahorrar, y otra partida de 300 reales, que cooperaba tambien al fin opuesto de ahorrar, y entre las dos equivalían á *ochocientos reales*; y todo esto se espresa con signos en lenguage matemático, diciendo, que *resulta un ahorro de* —800 *reales*; y equivale en el lenguage vulgar, á que *este sugeto se empeña cada año en ochocientos reales*.

Si comparamos cual de estos dos estados es mas ventajoso, esto es, el ahorrar —500 reales ó el ahorrar —800 reales, observarémos que es mas ventajoso un ahorro de —500 reales, que un ahorro de —800 reales; pues nadie duda, que mientras mas se atrase ó empeñe una persona, se empeora mas su suerte. Pero, con el fin de hacer bien sensible el efecto que causan los números negativos, cuando se reunen á otros nú-

méros, supongamos que este sugeto contraiga matrimonio; y que su esposa lleve una renta líquida anual de *mil* reales; y veamos este enlace las ventajas ó desventajas que produce á la esposa en cada uno de estos cuatro casos.

1.º Cuando el labrador ahorraba 1000 reales anuales, resulta que la esposa ganaba en su enlace; y agregados estos *mil* reales á los *mil* que le producían sus fincas, reunía *dos mil* reales líquidos al año.

2.º Cuando el labrador ahorraba *nada ó cero*, la esposa no alteraba su estado; y disfrutaba solo de sus mil reales.

3.º Cuando el labrador ahorraba —500 reales, ó lo que es lo mismo, se empeñaba en 500 reales, entónces su esposa se veía precisada á pagar estos quinientos reales con los 1000 que tenía por sí; y en su consecuencia, solo le quedaban 500 reales; luego el enlace le disminuía en *quinientos* reales su renta; por manera, que el llevar el marido —500 reales de ahorro, disminuía en 500 reales la renta de su muger.

4.º Cuando el labrador llevaba —800 reales de ahorro, esto es, que se empeñaba cada año en 800 reales, su muger tenía que pagar estos 800 reales con los 1000 de sus rentas, y únicamente le quedaban de estas 200 reales al año.

Estos cuatro casos diferentes de la situacion de la mencionada esposa, en lenguage matemático, espresan; 1.º *que cuando á un número cualquiera se agrega, añade, reune, junta ó suma un número positivo, el resultado aumenta.* 2.º *Que si á un número cualquiera, se le añade* 0 *esto es,* cero ó nada, *el resultado no aumenta ni disminuye.* 3.º *Que si á un número cualquiera se le añade, junta, reune ó suma un número negativo, el resultado disminuye en tanto como espresa el número negativo.* Y 4.º *que, si á un número cualquiera, se le añaden, juntan, reunen ó suman dos números negativos, diferentes entre si, cuando se reuna el número negativo, que tenga mayor valor numérico, esto es, que conste de mas unidades, se ob-*

tiene un resultado menor. Todo lo cual conduce á estas dos espresiones abreviadas, que son de uso contínuo: *los números negativos son menores que cero; y de dos números negativos, es mayor aquel que tiene menor valor numérico, esto es, ménos unidades.*

273 *P.* Cuando los números ó letras llevan signos ¿como influyen en los resultados de las operaciones?

R. Del modo siguiente: *si hay que efectuar una suma, se ponen los unos á continuacion de los otros con los mismos signos que llevan. Si hay que efectuar una resta, se pone el sustraendo á continuacion del minuendo, mudando los signos al sustraendo. Si* hay que multiplicarlos, *en punto á signos, se debe tener presente, que + por + da +; que — por — da +; y que + por —, ó — por + da —.* Es decir, *que en la multiplicacion, se verifica el que signos semejantes dan +, y signos desemejantes dan —. Lo mismo se verifica en la division.*

274 *P.* ¿Qué mas es indispensable para poder encontrar todas las raices de una ecuacion por este nuevo método?

R. Se necesita saber dividir el primer miembro de una ecuacion cualquiera, por la incógnita, ya sea con el esponente 1, ya con el esponente 2, acompañada de un número, ya positivo, ya negativo; lo que se efectúa por un procedimiento análogo al de la division numérica, y es el siguiente.

Se coloca el divisor á la derecha del dividendo; y se tiran las rayas como en la division numérica; pero teniendo cuidado de que, en el divisor, el primer término sea el que contiene á la incógnita. Respecto del dividendo, ya hemos dicho (270...5.ª), que debe estar *ordenado*, principiando por el término en que se halla la incógnita elevada al mayor esponente, continuando luego aquel en que está elevada á una unidad ménos, ó el que le siga inferior &c.; y así sucesivamente hasta poner por último término aquel que no tenga incógnita, debiendo hallarse por precision alguno sin incógnita; pues si esto no se verificase,

la ecuacion se podrá simplificar, dividiendo todos sus términos por la incógnita, con el menor de los esponentes; en cuyo caso resultará la ecuacion con un término constante, que será independiente de x, y estará espresado por un número. Despues *se divide el primer término del dividendo* (que como hemos dicho, es el que tiene mayor esponente) *por el primero del divisor que es x, ó x^2; y el cociente es el mismo primer término del dividendo con una unidad ménos en su esponente cuando el primer término del divisor sea x, ó con dos unidades ménos cuando sea x^2; y esto es lo que se pone debajo de las rayas en el lugar destinado al cociente. Despues de lo cual, se multiplica el primer término del cociente, que acabamos de hallar, por el primer término del divisor, y se coloca el producto con un signo contrario debajo del primer término del dividendo, lo cual está reducido en todos los casos, á poner debajo del espresado primer término del dividendo, el mismo primer término con el signo —. Luego, se multiplica el segundo término del divisor por el mismo cociente hallado, atendiendo á la regla de los signos de la multiplicacion; pero como esto se debe restar del dividendo, se le mudarán los signos al colocar dicho producto debajo del 2.° término del dividendo; es decir, que se multiplica el cociente hallado por el segundo término del divisor, y se pone el signo contrario del que le corresponde por la multiplicacion. Despues se hará la reduccion ó destruccion; la cual se efectuará del modo que se ha espresado (270...2.°), poniendo el resultado debajo de una raya. En seguida, se divide el término que ahora sea el primero, por x; ó por x^2; lo que está reducido á poner el mismo signo de dicho término, á continuacion del primer término puesto en el cociente; luego, el coeficiente del espresado término del dividendo; y despues, la x con una unidad ó dos unidades ménos en su esponente que las que tenia en dicho término. Se multiplica el cociente hallado por los dos términos del divisor, y su*

producto se coloca debajo de los dos primeros términos quedan en el dividendo parcial, pero mudándole los signos. Se tira debajo otra raya, y se efectúa la reduccion y destruccion. Se continúa del mismo modo hasta que se obtenga o *por resta, ó una resta en que no haya x. Si la resta que resulta es* o, *el cociente hallado es exacto; y es una* raiz *de la ecuacion el número del divisor, pero tomado con un signo contrario; si resulta alguna resta, es señal de que el primer miembro de la ecuacion no es divisible exactamente por el divisor; y que por consiguiente el segundo término del divisor no es raiz de la mencionada ecuacion; pero se verifica, que esta resta es el valor que resulta para el primer miembro sustituyendo en él, en vez de la incógnita, dicho número con un signo contrario.*

275 *P.* Ademas de las raices que habeis caracterizado con el nombre de *reales* ¿hay algunas raices de otra especie?

R. Si señor: hay otras raices, que se llaman *imaginarias*; las cuales son unos meros símbolos, que verifican la ecuacion, cuando se les sustituye en vez de la incógnita; pero estos símbolos no tienen otra significacion, que la de indicar ser imposible aquello que buscamos, ó que lo que se pretende investigar no se puede conseguir de ninguna manera. Por esta causa, lo que nos importa conocer son las *raices reales* de las *ecuaciones*, que son las útiles y convenientes; y como por este método se hallan todas las espresadas *raices reales*, resulta que *comprende cuanto se puede necesitar, sin detenerse á indagar la forma de las otras raizes ó simbolos, que, por lo general, no hay necesidad de conocer.*

276 *P.* ¿Hay algunos indicios, señales ó medios para conocer, por la forma de una ecuacion, la naturaleza de alguna ó algunas de sus raices?

R. Si señor: 1.° Toda ecuacion de grado *impar* tiene precisa é indispensablemente al ménos una raiz real de signo contrario al de su último término.

2.° Toda ecuacion de grado *par* cuyo último término es negativo, tiene al ménos dos raices reales, una positiva y otra negativa. 3.° La ecuacion en que todos los esponentes de la incógnita sean números pares, y su último término sea negativo, tendrá al ménos dos raices reales de igual valor numérico, una positiva y otra negativa. 4.° Si en una ecuacion son pares todos los esponentes de la incógnita, y se sabe que tiene una raiz real, se verifica que tiene ademas otra raiz real, igual con la conocida; pero con un signo opuesto. 5.° La ecuacion en que todos los términos sean positivos, y todos los esponentes de la incógnita sean pares, no puede tener *real* ninguna de sus raices; por lo que todas ellas son *imaginarias*. 6.° Si una ecuacion es de gado *par*, y su último término es positivo, puede tener todas sus raices reales, todas sus raices imaginarias, ó tener raices reales y raices imaginarias; pero agrupadas siempre en número *par*; porque las raices imaginarias, cuando las hay, deben ser siempre en número par. 7.° Si de sustituir dos números por la incógnita en una ecuacion, el primer miembro da valores de signos contrarios, se verifica que dicha ecuacion ha de tener al ménos una raiz real comprendida entre aquellos dos valores de la incógnita. 8.° La inversa de esta proposicion no es verdadera; pues cuando se sustituyen en una ecuacion dos números diferentes por la incógnita, y resultan valores con un mismo signo, puede verificarse que entre aquellos dos valores de la incógnita, haya muchas raices reales, con tal que sean en número par, es decir, que podrá haber dos raices reales, cuatro, seis, ocho &c. comprendidas entre dichos números (*).

(*) Todos estos indicios ó señales se deducen de la Teoría general de las ecuaciones contenida en el tomo 2.° parte 1.ª de nuestro Tratado elemental de Matemáticas desde el (§. 364) en adelante.

CAPITULO 2.°

Esposicion del nuevo método para encontrar las raices reales de las ecuaciones numéricas de todos los grados.

277 *P.* ¿A qué está reducido el nuevo método para resolver todo género de cuestiones, problemas ó ecuaciones solo por Aritmética?

R. A lo siguiente: planteada y preparada la ecuacion del modo que se ha dicho (270....5.ª), y haciendo que su primer término sea positivo, lo que se consigue mudando los signos á toda la ecuacion, si dicho primer término fuese negativo, se procederá de esta manera. 1.° Sustitúyase 1, en vez de la incógnita *en el primer miembro de la ecuacion; y véase en lo que se convierte dicho primer miembro.* Si el resultado es 0, el 1, que se sustituyó por x, será raiz de la ecuacion. Si dicho resultado no es 0, el número que se obtenga, será el error ó equivocacion, que se ha cometido de suponer que 1 sea el verdadero valor de x. Si el signo de dicho resultado es positivo, ó lo que es lo mismo, si tiene el signo $+$, se dice que el error ó equivocacion es por *esceso*; y si el resultado tiene el signo $-$, entónces el error ó equivocacion es por *defecto.*

2.° Sustitúyase despues 2 por x en el primer miembro de la misma ecuacion; si, ejecutadas todas las operaciones, resulta 0, el número 2 será raiz de la ecuacion: si no lo es, no lo será; y dicho resultado espresará el error ó equivocacion que se ha cometido: siendo por esceso si tiene el signo $+$ y por defecto si tiene el signo $-$.

3.° Si las sustituciones de los números 1 y 2 diesen un mismo error numérico, lo que podrá suceder en algunos casos, se procederá á sustituir 3 por x en el primer miembro de la mencionada ecuacion; y se averiguará el error ó equivocacion que produzca, en los mismos términos que se acaba de espresar.

4.º Hecho esto, deberémos observar cual de los números supuestos 1 y 2 da menor error numérico, esto es, cual de dichos errores tiene menor número de unidades, y procederémos á encontrar la correccion que se le debe hacer para aproximarse al verdadero. Esta correccion se halla practicando la regla siguiente: *multiplíquese el menor de estos dos errores numéricos, esto es, el que tenga ménos unidades, por la unidad positiva, si el espresado menor error numérico proviene del supuesto 2; y por la unidad negativa si dicho menor error numérico proviene del supuesto 1, atendiendo siempre á la regla de los signos al hacer la multiplicacion; y el producto divídase por la diferencia de dichos dos errores, tomando siempre por sustraendo el menor error numérico y atendiendo con mucho cuidado á la regla de los signos en la resta.* El cociente que se obtenga, se agregará con su signo, al número de que provino dicho menor error; y haciendo la reduccion ó simplificacion que convenga, se tendrá un resultado que será el verdadero valor de x ó de la raiz de la ecuacion si esta es de primer grado; y si no lo es, se tendrá un valor aproximado.

5.º El valor que nos resulte, despues de agregada la correccion al número supuesto que produce el menor error, y hecha la reduccion, destruccion ó simplificacion, se tomará por tercer número supuesto (ó por cuarto si fué necesario hacer el supuesto 3), suprimiendo alguna cifra decimal, ó poniendo en vez de ella una unidad mas al último guarismo que se conserve. Se sustituye este número supuesto por x en el primer miembro de la mencionada ecuacion; si dicho primer miembro se reduce á 0, aquel número supuesto es raiz de la ecuacion; y si dicho primer miembro no se reduce á *cero*, el número que resulte para dicho primer miembro, espresará el error ó equivocacion que se comete de suponer aquel número por x; y se deberá tener cuidado de espresar el signo del valor que resulta para el mencionado primer miembro, aun-

que sea el signo $+$, pues esto es muy esencial. Para encontrar la correccion, que se debe hacer al número supuesto, que da el menor error numérico de todos, *se multiplica el espresado menor error por la diferencia entre los dos números supuestos que producen los dos menores errores, pero poniendo siempre por minuendo el número que produce el menor error numérico de todos*; *y el producto se dividirá por la diferencia de los dos menores errores, tomando por sustraendo el menor error numérico de todos, y poniendo muchísimo cuidado en atender á la regla de los signos* (272). El cociente que se obtenga, espresará la *correccion* que se debe hacer al número que produce el menor error numérico de todos; la cual se agregará con su signo al espresado número que produce el menor error numérico; y hecha la reduccion, destruccion ó simplificacion que convenga, se obtendrá un número que deberá acercarse á alguna de las raices de la ecuacion mas que los anteriores.

En general, la equivocacion ó error que se debe obtener desde el tercer supuesto en adelante, debe ser menor que una de las equivocaciones ó errores que dan los dos números supuestos, que han servido para encontrar la correccion. Cuando se noten correcciones, que hagan cambiar la ley de los números supuestos, es indicio de que hay varias raices que no se diferencian mucho de dichos supuestos; y cuando se advierta que ya siguen un órden constante los errores, y las correcciones, es indicio de que ya aquellos números supuestos están como en la *esfera de actividad de una sola de las raices;* y que yéndose acercando cada vez mas á ella, se conseguirá muy pronto el determinarla.

6.º Este resultado, ya como se ha obtenido, ya suprimiendo alguno ó algunos guarismos decimales, ó bien añadiendo en vez de ellos una unidad al último guarismo que se conserva, segun el calculador juzgue conveniente para simplificar el modo de obtener los resultados, se tomará por otro número supuesto, y

se sustituirá en el primer miembro de dicha ecuacion. Si se reduce á o, será raiz de ella; si no se reduce á o el primer miembro de la mencionada ecuacion, el número que resulte, será el error ó equivocacion. *Y para encontrar la correccion, que se debe hacer al número que haya producido el menor error numérico de todos, se multiplica dicho menor error, por la diferencia entre los dos números que producen los dos menores errores, poniendo siempre por minuendo el nùmero que produce el menor de todos los errores; y el producto se dividirá por la diferencia de los dos menores errores, poniendo siempre por sustraendo el menor de todos.* El cociente, que se obtenga, será la correccion que se debe hacer al número que haya producido el menor de todos los errores; se agregará á dicho número; y hecha la simplificacion, se tendrá un valor que se deberá diferenciar ménos de alguna de las raices de la ecuacion, que ninguno de los anteriores.

7.° Se continuará del mismo modo, hasta que se haya encontrado un valor, que sustituido por x en el primer miembro de la ecuacion propuesta, dé *cero* por resultado; en cuyo caso, este número será raiz de la ecuacion; ó hasta que se halle para x un valor tan aproximado, como el calculador juzgue que le conviene; en cuyo caso este valor será una raiz aproximada de la ecuacion.

8.° Obtenida ya por este procedimiento una de las raices, se divide todo el primer miembro de dicha ecuacion por x ménos el valor hallado para la raiz, que se ha encontrado, si esta ha sido un número positivo, ó por x mas dicho número, si este ha resultado negativo, cuya operacion se practica del modo esplicado (274). El cociente que obtengamos, se igualará con *cero*; y por el mismo procedimiento, que acabamos de espresar (1.° á 7.°), hallarémos una raiz de esta última ecuacion, que será tambien raiz de la primitiva; dividirémos el primer miembro de la ecuacion, que acabamos de considerar, por x ménos esta segun-

da raiz, si se obtuvo para ella un valor positivo, ó por x mas dicho valor si se obtuvo un valor negativo.

9.º El cociente que obtengamos, le igualarémos con o; y por el mismo procedimiento, se hallará una raiz de esta última ecuacion, que tambien será raiz de todas las anteriores, inclusa la primitiva; y continuando del mismo modo, llegarémos por último, si la ecuacion tiene reales todas sus raices, á un cociente del primer grado, ó de dos términos, en que el uno contenga á la incógnita, y el otro sea un número; y este número será la última raiz de la ecuacion; pero con un signo opuesto al que tenga en dicho cociente.

10.º En el caso de que la sustitucion de un número supuesto, calculado por los anteriores, produzca un error del mismo signo, y mayor numéricamente que los dos errores que han servido para determinarle por medio de la correccion, ó un error igual al anterior, entónces hay dos circunstancias que considerar. 1.ª Si el mayor error que se obtiene, es el del tercer número supuesto, que se ha deducido por la correccion hallada por los dos números supuestos 1 y 2, entónces puede ser esto indicio de que, teniendo las raices valores numéricos muy grandes respecto de los números supuestos 1 y 2, sea tan corta la diferencia que produzcan en los errores, que no basten para encontrar la correccion oportuna, que conduzca á un número que dé una correccion, que sea menor que una ó las dos de las equivocaciones anteriores; y tambien puede provenir de estar muy próximas las raices. 2.ª Si el salir un error del mismo signo y mayor que los anteriores, ó igual con el último, fuese despues de haber dado otras equivocaciones menores, entónces aquello es indicio de que la ecuacion propuesta tiene raices imaginarias, esto es, valores que no tienen uso, ni aplicacion alguna en la Sociedad, ni en las Artes &c.; y que vienen á ser unos meros símbolos de cantidades, que combinados entre sí, verifican la ecuacion, pero que de ningun modo satisfacen á la cuestion, que á esta puede haber dado orígen.

El procedimiento que se debe seguir en ambas circunstancias, para conciliar la exactitud y seguridad con la sencillez y brevedad, es el siguiente. *Tómese por número supuesto el 10, el 100, el 1000, ó en general la unidad seguida de ceros, hasta que la equivocacion ó error que resulte, varie de signo, ó que por la naturaleza de la ecuacion, se vea que con sustituir mayores números, jamás se conseguirá que el error ó equivocacion cambie de signo. Si se logra obtener cambio de signo, en muchos casos se podrá continuar el método combinando de dos en dos varios de los errores con sus respectivos números; pero lo mas seguro, en general, es tomar como dos supuestos primitivos los dos números que producen los errores inmediatos de signos contrarios, hallando por ellos la correccion que se debe hacer al número de estos dos que produce menor error numérico.* Y se continuará el método, tomando siempre, para determinar la correccion, no precisamente los números que producen los dos menores errores, sinó los números que producen los errores mas próximos de signos contrarios. Cuando los números que producen los errores mas próximos de signos contrarios, disten ó se diferencien mucho entre sí, deberá el calculador hacer algun otro supuesto intermedio para encontrar errores de signos contrarios, cuyos números se hallen mas próximos: eligiendo en lo posible para estos supuestos intermedios, números redondos, esto es, que se compongan ó de decenas solas, ó de centenas solas, ó de millares solos &c. para que se obtenga el resultado con ménos molestia. Si se quiere conseguir el objeto lo mas breve posible, *se deberán hacer supuestos intermedios entre los números que producen errores de signos contrarios, hasta que los errores tengan igual número de guarismos en enteros*; y despues que esto se haya logrado, se continuará el método por el procedimiento general.

Si suponiendo $x=10$, $x=100$, $x=1000$ &c. no se consigue cambio de signo, se sustituirán por x en dicho primer miembro los números $-1, -10, -100, -1000$ &c.

hasta que se logre que cambie de signo la equivocacion ó error, ó se vea por la naturaleza de la ecuacion, que jamás esto se logrará. Si en efecto se logra cambio de signo en el error ó equivocacion, se eligirán para continuar el método, los números mas aproximados entre sí, que dan los errores ó equivocaciones de diferente signo; y se continuará el método como acabamos de decir hasta encontrar un valor exacto de la raiz, ó un valor tan aproximado, como el calculador juzgue conveniente.

Pero si no se logra cambio de signo en el error, por estos supuestos, es señal ó de que no hay ninguna raiz real en aquella ecuacion, ó que las hay en número par, y sus valores se hallan comprendidos entre dos de los supuestos hechos, esto es, entre los números 1, 10, 100, 1000 &c., —1, —10, —100, —1000 &c. Y para determinarlas, procederémos del modo siguiente. *Fórmese la ecuacion derivada de la ecuacion primitiva; lo que se consigue multiplicando el esponente de la incógnita, en cada término, por su coeficiente, disminuyendo cada esponente en una unidad, suprimiendo el término constante de la primitiva, é igualando á cero todo este conjunto de términos.* Se resolverá esta ecuacion *derivada* encontrando sus raices reales por el procedimiento anterior; lo cual será mas fácil, pues la ecuacion *derivada* resulta siempre lo ménos un grado inferior á la primitiva. Los valores que se obtengan para las raices de la ecuacion derivada, se sustituirán en la ecuacion primitiva; si diesen resultados de signos contrarios á los que se hayan obtenido por los otros supuestos, se tomarán para dos primeros números supuestos, respecto de esta combinacion, aquellos dos números que produzcan los errores mas próximos de signos contrarios; y con ellos se continuará el método hasta encontrar las raices reales que contengan, sean exactas, sean aproximadas. Y si ninguno de estos valores produce mudanza de signo, es señal infalible de que ya no existe ninguna raiz real en la ecuacion.

No se necesitan encontrar todas las raices de la ecuacion *derivada*; pues segun se vayan encontrando podrán sustituirse estos valores en la ecuacion de que se ha encontrado la *ecuacion derivada*; si da error de signo contrario á los anteriores, por medio de este y el mas próximo de los conocidos de signo contrario, se hallará una de las raices; despues, en vez de seguir sacando valores de la ecuacion derivada para sustituirlos en la principal, será generalmente mas breve el dividir el primer miembro de la ecuacion principal, de que se ha sacado la derivada, por la incógnita, unida á la raiz hallada con un signo contrario, y continuar el método con la ecuacion que resulte.

278 *P.* ¿Cómo haréis bien sensible todo esto?

R. Resolviendo el competente número de cuestiones ó ejemplos; y para que se adquiera facilidad en el *plantéo* de los problemas, se propondrán como cuestiones en los mismos términos que ocurren, ó se presentan en la sociedad.

Primera cuestion.

279 Nos propondrémos como primera cuestion, el resolver, por la regla general que acabamos de dar, la ecuacion $x+8=15$, que hemos resuelto (270).

Trasladando el término 15 del segundo miembro al primero, mudándole su signo, se nos convertirá en $x+8-15=0$. Si simplificamos ahora esta ecuacion, reduciendo á un solo número el conjunto $8-15$, observarémos que esto se reduce, en virtud de lo espuesto (271...2.ª), á -7; luego la ecuacion que debemos resolver es $x-7=0$ (1).

Como esta ecuacion es de primer grado, y su último término es negativo, inferimos (275...1.º) que ha de tener al ménos una *raiz real y positiva*; y como por ser de primer grado la ecuacion solo puede tener una raiz, resulta que esta ha de ser real y positiva. Para resolverla, le aplicarémos el método, suponiendo como este exige $x=1$; y sustituyendo 1 por x en su

primer miembro, se tiene $1-7$; que en virtud de lo espuesto (272), se reduce á -6; y como debía ser o, dicho primer miembro, resulta un error ó equivocacion espresado por -6; lo cual nos quiere decir, que dicho error consiste en 6 unidades, y que es por defecto.

Supongamos como exige el método $x=2$; y sustituyendo 2 por x en el primer miembro de la misma ecuacion, se nos convertirá dicho primer miembro en $2-7$, que (272) equivale á -5; pero como debía equivaler á o, hay un error ó equivocacion de -5, esto es, que consiste dicho error en *cinco unidades*, y que es tambien por defecto.

Para continuar ahora el mismo método, deberémos observar, que de los dos números supuestos 1 y 2, el que da menor error numérico es el 2; deberé multiplicar dicho menor error numérico -5 por la unidad positiva, lo que dá (273) $-5\times1=-5$, y este producto -5, lo deberé dividir por la diferencia de los errores, poniendo por sustraendo el menor error numérico; y como es muy esencial atender á los signos, la diferencia de los mencionados errores la espresaré del modo siguiente $-6-(-5)$; y como se ha manifestado (272) que, cuando de un número cualquiera, se quiere restar otro tambien cualquiera, se debe mudar el signo á este, la espresion anterior se convertirá en $-6+5$; y como esto equivale á -1, resulta que deberémos dividir -5 por este -1 que acabamos de encontrar; y como el signo $-$ dividido por $-$ da $+$ en el cociente, y 5 dividido por 1, es 5, resulta que la correccion que debemos hacer al 2 es $+5$; y como es positiva, se tendrá que añadir, y será $2+5=7$.

Tomemos este número 7 por *tercer número supuesto*; y sustituyéndole en el primer miembro de dicha ecuacion se nos convierte en $7-7$; y como $7-7$ es igual con o, que es el segundo miembro de la mismas ecuacion, el valor 7 de x satisface á dicha ecuacion; y por consiguiente, segun lo espuesto (271...6ª), el 7 es raiz suya; que es el mismo valor que se halló

(267...1.ª y 271...2.ª); lo cual va conforme con la regla, pues siendo de primer grado la mencionada ecuacion, nos ha dado la raiz exacta sin mas que haber hallado una correccion, y esta raiz es real y positiva como desde un principio anunciamos en virtud de lo espuesto (275...1.º).

Este método es tanto mas apreciable, cuanto se puede empezar por suponer para x cualquier número, por disparatado que parezca; y si proponemos que se principie por los supuestos 1 y 2, es solo por la mayor sencillez que esto produce. En efecto, si hubiéramos principiado por un número disparatado, como sería el suponer $x=1000$, el primer miembro de dicha ecuacion se nos hubiera convertido $1000-7$; y como quitando el 7 de 1000, resultan $+993$; tenemos un error de $+993$, puesto que dicho primer miembro debía ser 0; y esto nos quiere decir, que de suponer que el valor de x sea 1000 nos proviene un error numérico de $+993$ unidades, que es por esceso.

Supongamos que el segundo valor que démos á x sea 100; y entónces el mencionado primer miembro se nos convertirá en $100-7$, que equivale á $+93$; y como debía ser 0, resulta un error de $+93$ unidades; y siendo por exceso, lo señalarémos por $+93$.

Para continuar ahora, debemos multiplicar dicho menor error, $+93$ por la diferencia de los dos números, tomando por minuendo el que da el espresado menor error; luego deberémos multiplicar por $100-1000$; y como $100-1000$ equivale á -900; deberémos multiplicar el $+93$ por -900; é indicando la operacion, será $+93\times-900$, que por lo dicho (272) es -93×900; esto lo deberémos dividir por la diferencia de los errores, poniendo por sustraendo el menor error; luego lo deberémos dividir por $993-93$, que es $+900$. Y por lo mismo, la correccion que debemos hacer al 100, está espresada por $\frac{-93\times900}{+900}$.

Ahora, en virtud de lo espuesto (123), podemos suprimir el 900 del numerador con el 900 del denominador; y nos resulta —93 para la correccion; la cual, unida al 100, da $100-93=7$ como ántes.

Donde vemos, que aunque con mas complicacion en el procedimiento, hemos hallado el mismo resultado.

Para que este punto quede aun mas claro, elijamos todavía números supuestos caprichosos ó arbitrarios; y sea por ejemplo el suponer $x=50$; sustituyendo 50 por x en el mencionado primer miembro, se nos convierte en $50-7$, que equivale á $+43$; y como debía ser 0, el error es $+43$. Tomemos por segundo número supuesto el 4; esto es, sustituyamos 4 por x en dicho primer miembro; y se nos convierte en $4-7$, que se reduce á -3; luego el supuesto $x=4$ nos da un error de -3; esto es, nos dice que el error numérico es 3 y por defecto.

Como el supuesto 4 es el que da menor error numérico, para encontrar la correccion, debo multiplicar dicho menor error, que es -3, por $4-50=-46$; y el producto será $-3\times-46=+3\times46$. Esto lo debo dividir por $50-4=46$; y la correccion será $\frac{+3\times46}{+46}$; y en vitud de lo espuesto (123), podrémos suprimir el 46 del numerador y denominador, y nos resultará para la correccion $+3$; la cual, unida con el $+4$, nos dará $+4+3=7$, que es el mismo número que nos ha resultado por los otros métodos.

Tambien puede ser negativo uno ó los dos números supuestos. En efecto, tomemos por primer supuesto $x=20$; y sustituyendo 20 por x, dicho primer miembro se convierte en $20-7=+13$, y como debía ser 0, el error es $+13$.

Supongamos por *segundo número supuesto* el -5; esto es, supongamos $x=-5$; y sustituyendo -5 por x en dicho primer miembro, se nos convierte en $-5-7$; y como en virtud de lo espuesto (272), esto equivale

á -12, resulta un error ó equivocacion de -12; esto es de 12 unidades, pero por defecto.

El menor error numérico es -12; por lo que, para encontrar la correccion, deberé multiplicarle por la diferencia entre los dos números supuestos, tomando por sustraendo al que da menor error numérico; luego dicha diferencia será $-5-20=-25$, luego deberé multiplicar -12 por -25; lo que dará, indicando la operacion, $-12\times-25=+12\times25$. Esto lo deberé dividir por la diferencia de los dos errores colocando por sustraendo el menor error numérico; luego dicha diferencia será $13--12=13+12=25$; y en su consecuencia, la correccion estará espresada por $\frac{+12\times25}{25}$;

y suprimiendo el 25 del numerador con el 25 del denominador, resulta $+12$ para la correccion; y agregándola al número -5, que fué el que dió el menor error numérico, se tiene $-5+12=7$, del mismo modo que ántes.

Supongamos por último que sean negativos los dos primeros números supuestos, y que sea el primero $x=-10$; sustituirémos -10 por x en dicho primer miembro, y se nos convertirá en $-10-7=-17$. Supongamos por *segundo número supuesto*, *ménos un millon*, esto es, -1000000 para acabar de confirmar la seguridad del método; y dicho primer miembro se nos convertirá en $-1000000-7$, que equivale á -1000007. Aquí el menor error numérico es -17; porque aunque el error -17, hablando en rigor, es mayor en virtud de lo dicho (272), que -1000007, entendemos en esto por error numérico el número que resulta, prescindiendo del signo; porque aquí lo que buscamos es el valor que se separa ménos del que debe tener el primer miembro que es 0; y no puede dudarse que, cualquiera que sea el sentido y significado del -17 y del -1000007, el -17 se halla mas cerca de 0 que el -1000007. Dicho menor error -17, lo deberé multiplicar por la diferencia de los dos núme-

ros supuestos, poniendo por sustraendo el que da menor error numérico; luego dicha diferencia será $-10--1000000$, que en virtud de lo espuesto (273), es $-10+1000000=+999990$.

Multiplicando -17 por 999990, se tiene -17×999990; esto lo debo dividir por la diferencia de los errores, tomando por sustraendo el menor; luego será por $-1000007--17$, que en virtud de lo espuesto (273) se nos convertirá en $-1000007+17=-999990$.

Luego la correccion será $\dfrac{-17\times999990}{-999990}$.

Ahora, en punto á los signos, el $-$ de arriba dividido por el $-$ de abajo, da $+$ en el cociente, en virtud de lo espuesto (273); el 999990 del numerador se puede suprimir con el mismo número del denominador; por lo que la correcciones 17; que, agregada al -10, da $-10+17=7$ como ántes. Luego, cualesquiera que sean los supuestos, el método nos conduce al verdadero resultado.

Segunda cuestion.

280 Apliquemos este procedimiento á la ecuacion $2x=20$, que hemos resuelto (271...3.[c]). Para esto, segun la regla, deberémos reducir á 0 el segundo miembro, pasando al primero el 20 que está en él; y se nos convertirá en $2x-20=0$ (2).

Desde luego advertimos, que, siendo 1 el esponente de x, que es número impar, su única raiz será real; y siendo negativo el último término ó el termino conocido, la raiz será positiva. Para aplicarle el método, segun hemos espresado (271... 5.[a]), deberíamos dividir esta ecuacion por el coeficiente 2, que tiene x en el primer miembro; pero nuestro método es tan general, que ni aun se necesita semejante operacion para encontrar uno de los valores; y si lo hemos puesto es para que sirva en todos los casos, y poder hallar todas las raices reales que tengan las ecua-

ciones; mas como aquí la ecuacion es de primer grado, solo tiene una raiz, y podemos aplicarle el método sin dicha preparacion, como vamos á manifestar.

Supongamos $x=1$, y el primer miembro se convertirá en $2\times1-20$; y como $2\times1=2$, resulta que dicho primer miembro se reduce á $2-20=-18$, y como debía ser o, hay un error de -18.

Supongamos $x=2$; y el primer miembro se convertirá en $2\times2-20=4-20=-16$; y como debía ser o, resulta el error de -16.

Este es el menor error numérico: y para encontrar la correccion que debo hacer al número 2, de que proviene, multiplico -16 par -1; lo que da $-16\times-1=+16$. Esto lo debo dividir por $-16-(-18)=-16+18=+2$: luego la correccion será

$$\frac{+16}{+2}=8.$$ Reuniendo dicha correccion con el número 2 de que proviene, resulta $2+8=10$; y como sustituyendo 10 por x en el primer miembro de la mencionada ecuacion, se convierte en o, se debe inferir, que 10 es raiz de la ecuacion, como en efecto asi se verifica, pues este resultado es el mismo que obtuvimos (271... 4.ª)

Tercera cuestion.

281 Propongámonos *hallar un número tal, que si á su cuadrado se le añaden ochenta y siete unidades, resulte veinte y ocho veces el mismo número, quitándole cien unidades.*

Plantéo. Llamando x al número que se busca, su cuadrado será x^2; y agregándole 87 se tendrá x^2+87. Ahora dice el enunciado de la cuestion, *resulte*; la palabra *resulte* se escribe con el signo $=$; y como *veinte y ocho veces el mismo número* se escribe $28x$, y la espresion *quitándole cien unidades*, con -100, resulta planteada la cuestion en la ecuacion siguiente

$$x^2+87=28x-100;$$

ó trasladando (271...2.ª) $x^2+87-28x+100=0$; ó reduciendo $x^2-28x+187=0$ (3).

Por ser esta ecuacion del segundo grado, inferimos que tendrá dos raices; y por ser positivo su último término, estas dos raices podrán ser (276...5.º) ó ambas reales, ó ambas imaginarias.

Para aplicarle el método, supongamos $x=1$, y el primer miembro se nos convertirá en $(1)^2-28\times1+187$; y como $(1)^2=1\times1=1$, y $28\times1=28$; la espresion anterior se nos convertirá en $1-28+187=+160$; y como debía ser 0, resulta un error de $+160$, que es por *exceso*.

Supongamos $x=2$; y sustituyendo este número por x en la ecuacion, se convertirá en $(2)^2-28\times2+187$; y como $(2)^2=2\times2=4$; y $-28\times2=-56$, la espresion anterior se convierte en $4-56+187=-52+187=+135$; y como debía ser 0, resulta un error ó equivocacion que se espresa por $+135$.

Aquí vemos, que el supuesto que dá menor error numérico es el 2; y para encontrar la correccion, que le corresponde, deberémos (277...4.º) multiplicar $+135$ por la unidad positiva, esto es, por $+1$; lo que dará $+135\times+1=+135$; esto lo debo dividir por la diferencia de los dos errores, haciendo de sustraendo el menor error numérico; luego será por $160-135=25$.

Luego dicha correccion será $\frac{135}{25}$; y como haciendo esta division, se halla $+5,4$, reuniendo esto con el número 2, tendré $2+5,4=7,4$.

Tomando este valor $7,4$ por *tercer número supuesto*, y sustituyéndole en el primer miembro de la misma ecuacion, será

$$(7,4)^2-28\times7,4+187=54,76-207,2+187=241,76-$$
$$-207,2=+34,56;$$

que será el error.

Ahora, segun la regla (277...5.ª), debo multiplicar este error $+34,56$ por $7,4-2=5,4$; y su producto

dividirlo por 135—34,56=100,44; luego la segunda correccion estará espresada por

$$\frac{34,56\times5,4}{100,44}=\frac{186,624}{100,44}=1,85;$$

la cual, agregada al tercer número supuesto 7,4, le convierte en 7,4+1,85=9,25.

Tomando este valor 9,25 por *cuarto número supuesto*; y sustituido en el primer miembro de dicha ecuacion, se tendrá +13,5626 de error. Para hallar la correccion que se debe hacer al 9,25, multiplico su error por 9,25—7,4=1,85; lo que dá por producto 10,036324. Esto lo dividiré por 34,56—13,5626=20,9974; y tendré 0,47 para la correccion; que, agregada al 9,25, dá 9,25+0,47=9,72.

Tomo este valor 9,72 por *quinto número supuesto;* y sustituido en el primer miembro de dicha ecuacion, se tendrá 9,3184 de error. Para hallar la correccion que se debe hacer al 9,72, multiplico su error por 9,72—9,25=0,47; y tengo el producto 4,379648; que, dividido por 13,5626—9,3184=4,2442, resulta 1,03 para la correccion: que, agregada al 9,72, dá

9,72+1,03=10,75.

Tomo este valor 10,75 por *sesto número supuesto*; y sustituido en el primer miembro de la ecuacion, da 1,5625 de error. Para hallar la correccion al 10,75, multiplico este error por 10,75—9,72=1,03; lo que da por producto 1,609375; que dividido por 9,3184—1,5625=7,7559, resulta 0,2 para la correccion; que, agregada al 10,75, da

10,75+0,2=10,95.

Ahora, en virtud de lo espuesto (277..5.°), tomo 11 por *séptimo número supuesto;* y como sustituido en el primer miembro de la ecuacion, la reduce á 0, debemos inferir que el número 11 es una raiz de la ecuacion.

282 Para encontrar la otra raiz, dividiré dicho primer miembro por x ménos este valor, por el procedimiento esplicado (274), que es el que aquí se presenta,

$$\begin{array}{r|l} x^2-28x+187 & x-11 \\ -x^2+11x \quad\;\; & \overline{x-17} \\ \hline -17x+187 & \\ +17x-187 & \\ \hline 0 \qquad 0 & \end{array}$$

Pongo el primer miembro de la (ec. 3) ordenado en un renglon; y en el mismo renglon el $x-11$ que ha de hacer de divisor, poniendo entre los dos una raya de arriba abajo, y otra debajo del divisor. Principio dividiendo x^2 primer término del dividendo, por x primer término del divisor. En cuanto á signos, como tanto el x^2 como el x tienen el signo $+$, el cociente deberá tener tambien (273) el signo $+$; pero como es al principio de escritura, no se pone. En cuanto á coeficiente, como el coeficiente del x^2 es 1, y el de x tambien es 1, y 1 partido por 1 es 1, resulta que el coeficiente del cociente tambien es 1, que no se pone. En cuanto á las letras, como el dividendo x^2 consta solo de la x con el esponente 2; y el divisor x se compone de la x con el esponente 1, como se han de restar los esponentes, se tendrá que $2-1=1$, será el esponente de la x en el cociente; pero como el 1 cuando es esponente se omite tambien, resulta que el cociente es x, que es el primer término que hay debajo de la raya del divisor.

Ahora debo multiplicar todo el divisor por este cociente, y restarlo del dividendo; lo que haré del modo siguiente: en punto á signos, diré el $+$ del $+x$ del dividendo, (porque aunque no le tiene, se le suple), por el $+$ del $+x$ del divisor, (por la misma razon), da $+$, que como se ha de restar se pone el signo contrario $-$ debajo del x^2 del dividendo; luego digo, x del divisor por x del cociente da x^2, que pongo

debajo del x^2 del dividendo; y aparece $-x^2$ debajo del x^2 del dividendo.

Paso ahora á multiplicar el segundo término del divisor, que es -11, por x; lo que ejecuto, diciendo $+$ de x en el cociente, por $-$ del -11 en el divisor, da $-$; y como se ha de restar, pongo $+$ debajo del $-$ del -28; despues digo, x por 11 son $11x$, que pongo debajo de $28x$. Como ya no hay mas términos en el divisor, tiro una raya debajo del producto que he puesto debajo de los dos primeros términos del dividendo, y procedo á la simplificacion; y como el x^2 del dividendo, se destruye con el $-x^2$ que tiene debajo, procedente del producto del primer término del divisor por el cociente, resulta que pongo o debajo de la raya en columna con dichos dos términos. Paso despues á la simplificacion de lo que sigue: y observo que $-28x$ y $+11x$, como tienen signos contrarios, queda reducida la operacion á restar los dos números 28 y 11, y á poner la resta 17 con el signo $-$ que es el que tiene el mayor coeficiente numérico; y queda debajo de la raya, y por la parte inferior del segundo término, $-17x$. Al lado de esta resta, bajo el término $+187$ que sigue en el dividendo; y tengo por resta total $-17x+187$, que debo dividir por el divisor $x-11$.

Ahora, continúo la division de este modo: tengo que dividir $-17x$ por x; y digo: $-$ del $-17x$ dividido por $+$ del x (pues cuando no hay signo se sobreentiende el signo $+$), da -1 que pongo en el cociente á continuacion de x. Luego sigo, $17x$ partido por x, da 17, pues no hay mas que suprimir la x, que es comun en dividendo y divisor; y coloco el 17 despues del signo $-$ que acabo de poner en el cociente. Ahora procedo á verificar la multiplicacion de todo el divisor $x-11$ por -17. El producto de x por -17, es $-17x$; pero como se ha de restar, debo mudar el signo, y así pondré $+17x$ debajo de $-17x$ en la resta anterior; luego multiplico el -11 por -17 y obtengo por producto $+187$; pero como lo debo restar,

pongo -187 debajo del $+187$; y despues tiro una raya por debajo de todo; y como el término $-17x$, se destruye con el $+17x$ que tiene debajo, queda o por resta, que pongo debajo de la raya en la misma columna. Despues solo queda $+187$ y debajo -187, que como son números iguales y tienen signo contrario, se destruyen y queda o por resta, que pongo debajo de la raya en la misma columna; y como ya no quedan mas términos en el dividendo, y ha resultado o por resta total, infiero que el cociente $x-17$ es exacto; é igualado con o da $x-17=0$, que, trasladando, da $x=17$. Luego 17 es otra de las raices.

Dos cosas hubiéramos podido omitir en esta division; á saber, la multiplicacion de cada cociente hallado por el primer término del divisor, y el bajar el término $+187$ al lado del $-17x$; lo hemos hecho en este ejemplo para que los principiantes se radiquen bien en su práctida; en los ejemplos sucesivos lo omitirémos para no hacer mas ni ménos que lo indispensable, lo cual abrevia las operaciones; y cuando se repiten muchas, ahorra considerable tiempo, y hay ménos riesgo de equivocarse.

Si queremos comprobar que el 17 es tambien raiz de la ecuacion, no hay mas que sustituir 17 por x en la (ec. 3), y se verá que el primer miembro se convierte en *cero*.

Aquí debemos admírar no solo la ventaja de este nuevo método, por el cual hemos resuelto una ecuacion del 2.º grado, sin estraer raiz cuadrada; sinó tambien la prerogativa singular que tienen las Matemáticas, á saber: la cuestion que nos condujo á esta ecuacion $x^2-28x+187=0$, decía, que se *pedia un número*; y el método nos da dos números, que satisfacen á la misma ecuacion y cuestion. Por manera, que el método es tan fecundo, que da mas de lo que el calculador pedia; y cualquiera de los dos números satisface á la cuestion en los mismos términos que se propusó. Verifiquemos aquí, que el número 17 satisface á la cuestion: y dejarémos á los principiantes la verificacion de

que tambien satisface á dicha cuestion el número 17. En efecto, la cuestion dice: *que al cuadrado del número propuesto se le añadan* 87; el cuadrado (227) de 17 es 289; añadiéndole 87 se convierte en 376. La cuestion exige que esto ha de ser igual con 28 veces el mismo número ó el número que se pide, quitando á esto 100 unidades. Ahora bien, 28 veces el 17 es $28 \times 17 = 476$; y quitándole 100, resulta 376, que es lo que la cuestion exigía. Luego el número 17 satisface á la cuestion que condujo á la (ec. 3).

283. Pero reune todavía una circunstancia que le hace lo mas maravilloso que se puede concebir, y es la siguiente. En todos los métodos, cálculos &c., cuando uno comete un descuido y se equivoca poniendo, por ejemplo, un guarismo por otro, ya todos los cálculos que se hagan, fundados en aquel, son inútiles; y es necesario rehacerlos. En este método, nada importa el que uno se equivoque; pues el mismo método conduce al resultado las mas veces sin mayor complicacion. Para convencernos de esto, supongámos que al valuar la correccion que se debe hacer al quinto número supuesto, en vez de haber hallado que era 1,03, hubiera puesto por equivocacion, que era de 1,38, que es un valor mayor. Entónces, agregado este valor al quinto número supuesto 9,72, se convertiría en

$$9{,}72 + 1{,}38 = 11{,}10.$$

Tomaría este valor 11,1 por *sesto número supuesto*: y sustituido en el primer miembro de la misma ecuacion, le convertirá en $123{,}21 - 310{,}8 + 187 = 0{,}59$.

Para encontrar la correccion, que se debe hacer al 11,1, multiplico el menor error, que es $-0{,}59$ por $11{,}1 - 10{,}75 = 0{,}35$; lo que da por producto $-0{,}2065$; que dividido por la diferencia de los dos errores que es $1{,}5625 - 0{,}59 = 0{,}9725$, resulta $-0{,}2$ para la correccion; que, agregada al 11,1, da $11{,}1 - 0{,}2 = 10{,}9$, que podrémos tomar ya como 11, que es la verdadera raiz; y sustituido por x en el primer miembro de la (ec. 3), se convierte en *cero* como ántes.

Si en vez de haber puesto demas, hubiera puesto de ménos, y la correccion al quinto número supuesto la hubiera tomado de 0,3, entónces, agregada al quinto número supuesto 9,72, se nos convertiría en

$$9,72+0,3=10,02.$$

Este hubiéramos debido tomar por sesto número supuesto, y sustituido en el primer miembro de la ecuacíon, da +6,8404.

Como este error es menor que todos, hallaré la correccion que se debe hacer al 10,02, multiplicando su error por $10,02-9,72=0,3$, y obtendré por producto 2,05212. Esto lo debo dividir por la diferencia de los dos menores errores, esto es, por $9,3184-6,8404=2,4780$; y se obtiene para la correccion 0,83; que, agregada al 10,02, da

$$10,02+0,83=10,85.$$

Tomando 10,85 por *séptimo número supuesto*, resulta +0,9225 de error, y como es menor que todos, hallo la correccion que se debe hacer al 10,85, multiplicando su error por $10,85-10,02=0,83$; lo que da por producto 0,765675. Esto lo dividiré por la diferencia de los dos menores errores, que es $6,8404-0,9225=5,9179$, y tengo 0,12 para la correccion; que, agregada al 10,85, da $10,85+0,12=10,97$, que podrémos tomar sin temor por el 11; y sustituido en el primer miembro de la (ec. 3), le reduce á 0, como ántes.

Luego queda probado, que *nada importa el que se cometa un error de cálculo*; pues lo mas que puede suceder es que se necesite hacer uno ó dos supuestos mas; y esto podrá verificarse en los casos mas desventajosos, lo cual nunca será tan complicado como el rehacer los cálculos desde el parage donde se cometió el descuido. En el ejemplo anterior, cuando hemos puesto de mas, se ha obtenido el resultado con el mismo número de supuestos; y cuando se ha puesto de ménos, se ha tenido que hacer solo un supuesto mas.

En comprobacion de esto, no tenemos mas que reflexionar, que si hemos hallado en los ejemplos anteriores los verdaderos resultados empezando por supuestos disparatados, cualquiera que sea el error que se cometa, no puede tener otro efecto que el de un supuesto arbitrario; y como cualquiera que sea este, el método conduce al objeto, no debe quedar la menor duda de esta prerogativa singular y apreciabilísima; que tiene este método sobre todos los demas; pues nos es de la mayor importancia en la práctica, por lo mucho que se pueden abreviar los cálculos.

En efecto, esto nos autoriza á omitir alguna ó algunas cifras decimales, ya despreciándolas enteramente, ya sustituyendo una unidad en vez de lo que se desprecia cuando el guarismo de especie superior que se suprime, es 5 ó mayor que 5.

Por esta causa, en vez de haber tomado 7,4 por tercer número supuesto, pudimos tomar solo 7; y sustituyendo este número por x en dicho primer miembro, hubieramos obtenido 40 de error, pero empleando ménos tiempo. En este caso, segun la regla, hubiera multiplicado este error por $7-2=5$: y dividiendo el producto 200 por la diferencia de los errores, que es 95, hubiera obtenido 2 para la correccion; que, agregada al 7, da 9.

Tomando 9 por *cuarto número supuesto*, da 16 de error; y como es menor que todos, hallo la correccion al 9 multiplicando su error por $9-7=2$; y dividiendo el producto 32, por la diferencia de los dos menores errores, que es 24; da 1,3 para la correccion; que, agregada al 9, da 10, 3.

Tomando 10 por *quinto número supuesto*, da 7 de error; y como es menor que todos, hallo su correccion, multiplicando su error por $10-9=1$; y dividiendo el producto 7 por la diferencia de los dos menores erores, que es 9, resulta 0,77 para la correccion, que, agregada al 10, da 10,77.

Como la fraccion decimal pasa de la mitad de la unidad, tomo 11 por *sesto número supuesto*; y como

sustituido por x en el primer miembro de la (ec. 3) le reduce á o, infiero que 11 es raiz de dicha ecuacion. Donde veo que he hallado la misma raiz con un supuesto ménos; y costando menor trabajo el hallar cada correccion.

Cuarta cuestion.

284 *Hallar un número tal, que si á su cuadrado se añade* 6 *veces el mismo número, resulten noventa y una unidades.*

Plantéo. Llamando x este número, su cuadrado será x^2; seis veces el mismo número será $6x$; con lo cual la cuestion quedará planteada en la siguiente ecuacion $x^2+6x=91$;

ó trasladando $x^2+6x-91=0$ (4).

Esta ecuacion es de segundo grado; por lo que es de grado *par*; y como su último término es negativo, resulta (276...2.ª) que tiene dos raices reales; una positiva y otra negativa.

Para aplicarle el método, sustituirémos 1 por x en dicha ecuacion, y su primer miembro se convertirá en $1^2+6\times1-91=1+6-91=-84$; y como debía ser o, resulta que el error es -84.

Supongamos $x=2$; y tendrémos que el primer miembro, se convertirá en $2^2+6\times2-91=4+12-91=-75$; luego el error es -75; y como este es el menor error numérico, para encontrar la correccion que se debe hacer al 2, de que proviene, multiplicaré -75 por 1; y dividiendo el producto -75 por $-84-(-75)=-84+75=-9$; resulta 8 para la correccion; que agregada al 2, tendré para un valor mas aproximado que los anteriores el número $2+8=10$.

Tomo este valor 10 por *tercer número supuesto*; y sustituyéndole por x en el primer miembro de la ecuacion propuesta, se nos convertirá en $(10)^2+6\times10-91=100+60-91=160-91=+69$; y como dicho primer miembro debía ser o, nos resulta un error ó equivocacion de $+69$. Para encontrar la

correccion, que se debe hacer al tercer número supuesto 10, multiplicaré este error +69 por 10—2=8; y dividiendo el producto 552 por la diferencia de los dos menores errores, que es —75—69=—144, resulta —3,8 para la correccion; que, agregada al 10, da 6,2.

Tomando este valor 6,2 por *cuarto número supuesto*, y sustituyéndole por x en el primer miembro de dicha ecuacion, nos resulta —15,36 de error; y como este valor es negativo, y el supuesto del 10 era positivo, infiero (276...7.°), que dicha ecuacion ha de tener al ménos una raiz real entre 6,2 y 10. Como el error del supuesto 6,2 es menor, hallo la correccion al 6,2, multiplicando —15,36 por 6,2—10=—3,8; lo que da +58,368; que, dividido por
69—(—15,36)=69+15,36=84,36, obtengo 0,69 para la correccion; la cual, añadida al 6,2, da 6,89.

Tomemos este valor 6,89 por *quinto número supuesto*; y sustituyéndole en el primer miembro de la ecuacion, se nos convertirá en
$(6,89)^2+6\times6,89-91=47,4721+41,34-91=-2,1879$.
Para encontrar la correccion, que se debe hacer al número 6,89, multiplico esta equivocacion ó error 2,1879 por 6,89—6,2=0,69; y obtengo por producto—1,509651; que, dividido por la diferencia de los dos menores errores, que es
—15,36—(—2,1879)=—15,36+2,1879=—13,1721, resulta +0,12 para la correccion; que, añadida al 6,89, se nos convierte en 6,89+0,12=7,01.

Ahora, en cualquier cálculo que tuviésemos este valor 7,01, si la unidad, á que se refería este número, no era de suma importancia, despreciaríamos la *centésima* que resulta demas, y nos quedaríamos con el número entero 7.

Sustituyendo 7 por x en el primer miembro de la (ec. 4); obtenemos $(7)^2+6\times7-91=49+42-91=0$. Luego, en virtud de lo espuesto (271...6.°), el número 7 es raiz de la (ec. 4).

285. Para encontrar la otra raiz, divido el pri-

mer miembro de la (ec. 4) por $x-7$, lo que haré por la regla dada (274), del modo abreviado que he prometido (282), en los términos siguientes:

$$\begin{array}{r|l} x^2+6x-91 & x-7 \\ \cline{2-2} \perp+7x & x+13 \\ \cline{1-1} +13x & \\ \perp\ +91 & \\ \cline{1-1} 0 & \end{array}$$

Colocando el divisor á la derecha del dividendo en el mismo renglon, separados por una raya de arriba abajo, y tirada otra raya debajo del divisor, divido x^2, primer término del dividendo, por x primer término del divisor, y obtengo $+x$ por cociente, que pongo solo x. Ahora, como el primer término del divisor multiplicado por el cociente hallado, ha de producir el primer término del dividendo, del cual se ha de restar, resulta que siempre se destruirá con él; y por lo mismo, no hay que hacer mas que tachar dicho primer término del dividendo, esto es, pasarle la pluma, lápiz ó yeso por encima; y para dar á conocer que se ha de hacer esta operacion, lo señalamos en lo impreso con este signo $\perp$, que hemos inventado *espreſeso* para que indique dicha operacion. Despues, procedo á multiplicar el -7 por x, lo que da $-7x$; pero como se ha de restar, le mudo el signo y pongo $+7x$ debajo del $+6x$; tiro debajo una raya, y como $+6x$ y $+7x$ componen $13x$, resulta que esta cantidad es la que debe servir de dividendo parcial.

Divido $+13x$ por x primer término del divisor; y el cociente $+13$ lo pongo á continuacion de la x en el cociente. Tacho el $+13x$ que ha servido de dividendo parcial, lo que ejecuto pasando en el escrito la pluma, lápiz ó yeso por encima del $+13x$; con una cierta oblicuidad, para que todo quede borrado, esto es, coeficiente y letra; y cuya operacion indico en el

impreso con $\perp$. Procedo á multiplicar el -7 del divisor por el cociente $+13$, que acabo de hallar; y mudando el signo al producto, me resulta $+91$, que pongo debajo del -91 del dividendo, tirando por la parte inferior una raya; y como -91 y $+91$ se destruyen, y no queda ninguna resta, pongo o debajo; y resulta que, teniendo cociente exacto, esto me comprueba (271...8.ª) que el 7 es raiz de la (ec. 4).

Igualando á cero el cociente $x+13$, se tiene $x+13=0$; que trasladando, da $x=-13$; luego -13 es la otra raiz. En efecto, sustituyendo -13 por x en el primer miembro de la (ec. 4), se convierte en $(-13)^2+6\times-13-91$; y como $(-13)^2$ es igual con $-13\times-13=169$; y $6\times-13=-78$; esta espresion se convertirá en $169+78-91=169-169=0$; y como reduce á o dicho primer miembro, es señal infalible (271...6.ª) de que el -13 satisface á la (ec. 4), y á la cuestion que le dió orígen, como deberán comprobar los principiantes.

286. Hemos hallado que de las dos raices de la (ec. 4), la una es positiva y la otra negativa, como desde un principio (284) anunciamos. En esta cuestion no aparece de gran importancia el número negativo -13; pero cuando las ecuaciones espresan relaciones de posicion, las resoluciones negativas son de una importancia muy estraordinaria; pues si las resoluciones positivas indican que los objetos se han de hallar á la derecha, las negativas dicen que se han de hallar á la izquierda; si las positivas dicen que se han de hallar por la parte superior de algun objeto, las negativas dicen que se han de hallar por la parte inferior &c.

Quinta cuestion.

287. *Hallar un número tal, que si á su cuadrado se le añaden* 47 *unidades, resulten* 26 *unidades, ménos* 10 *veces el número propuesto.*

Esta cuestion queda planteada en la siguiente ecuacion $x^2+47=26-10x$; que trasladando todo al pri-

mer miembro, resulta $x^2+10x+47-26=0$; ó simplificando, será $x^2+10x+21=0$ (5).

Siendo de segundo grado esta ecuacion, tendrá dos raices; y como el último término es positivo, resulta que estas dos raices podrán ser ó ambas reales ó ambas imaginarias. Para aplicarle el método, supongamos $x=1$, y sustituyendo 1 por x en su primer miembro, se nos convertirá en $1^2+10\times1+21=1+10+21=32$; y como debía ser 0, el error es $+32$. Sustituyendo 2 por x se tiene $2^2+10\times2+21=4+20+21=45$ de error. Y como el menor error es el del supuesto 1, multiplico su error $+32$ por -1; y dividiendo el producto -32 por la diferencia de los errores, que es $45-32=13$, resulta $-2,46$ para la correccion; que, agregada al 1, da $-1,46$.

Tomando $-1,46$ por *tercer número supuesto*; y sustituyéndole en el primer miembro de dicha ecuacion, da $+8,6316$ de error; y como es menor que todos, hallo la correccion al $-1,46$, multiplicando su error por $-1,46-1=-2,46$; y dividiendo el producto $-21,233736$ por la diferencia de los dos menores errores que es $32-8,6316=23,3684$, resulta $-0,909$ para la correccion; que, agregada al número $-1,46$, da $-2,369$.

Tomando $-2,369$ por *cuarto número supuesto*, da $+2,922161$ de error; y como es menor que todos, hallo la correccion al $-2,369$, multiplicando su error por $-2,369--1,46=-2,369+1,46=-0,909$; y dividiendo el producto $-2,656244349$ por la diferencia de los dos menores errores, que es $5,709439$, resulta $-0,465$ para la correccion; que, agregada al $-2,369$, da $-2,834$.

Tomando $-2,834$ por *quinto número supuesto*, da $+0,691556$ de error; y como es menor que todos, hallo la correccion al $-2,834$, multiplicando su error por $-2,834--2,369=-2,834+2,369=-0,465$; y dividiendo el producto $-0,32157354$ por la diferencia de las dos menores errores, que es $2,230605$, resulta $-0,144$ para la correccion; que, agregada al

$-2{,}834$, da $-2{,}978$. Y como en vez del quebrado que acompaña al entero, puedo añadir (184) una unidad á este, se me convertirá en -3.

Tomando -3 por *sesto número supuesto*, y sustituido en el primer miembro de la ecuacion, le convierte en $(-3)^2+10\times-3+21=9-30+21=30-30=0$. Por lo que infiero que el número -3 es raiz de la ecuacion.

288. Para buscar la otra raiz, divido su primer miembro por $x+3$; y ejecutándolo como se ha dicho (274), y se ha ejacutado detalladamente (285), y aquí se vé:

$$\begin{array}{l|l} x^2+10x+21 & x+3 \\ \perp - 3x & \overline{x+7} \\ \hline \quad +7x & \\ \quad\quad \perp -21 & \\ \hline \quad\quad 0 & \end{array}$$

obtengo por cociente $x+7$; que, igualado á 0, da $x+7=0$; y trasladando, resulta $x=-7$. Por lo que, las dos raices de la ecuacion propuesta son reales, como desde luego se había previsto. y ambas son negativas: acerca de las cuales repetimos lo que en la cuestion anterior.

Sesta cuestion.

289. *Hallar un número tal, que si á los dos tercios de su quinta potencia, se añade el quintuplo del mismo número; y de esto se quitan* 8 *unidades, resulte diez veces la mitad del mismo número, mas cuatro veces la sesta parte de la quinta potencia del mismo número, ménos el cuadrado de dicho número, y ménos doce unidades.*

Siguiendo exactamente lo manifestado (270), esta cuestion queda planteada en la siguiente ecuacion

$$\frac{2}{3}x^5+5x-8=10\cdot\frac{x}{2}+4\cdot\frac{x^5}{6}-x^2-12.$$

Trasladando todo al primer miembro, se tiene

$$\frac{2}{3}x^5+5x-8-10.\frac{x}{2}-4.\frac{x}{6}+x^2+12=0.$$

Ahora, el quinto término $-4.\frac{x^5}{6}$ es lo mismo que $-\frac{4}{6}x^5$; y como $\frac{4}{6}$ es igual (123) con $\frac{2}{3}$, resulta que este término se destruye con el primero $\frac{2}{3}x^5$.

El cuarto término $-10.\frac{x}{2}$, es lo mismo que $-\frac{10}{2}.x$; y como $\frac{10}{2}=5$, resulta que este término $-10.\frac{x}{2}$ es lo mismo que $-5x$; por lo cual se destruirá con el segundo término, que es $+5x$.

El -8 y el $+12$ equivalen á 4; de manera que, suprimidos los cuatro términos, que se destruyen de dos en dos, y reducidos los otros dos números á uno solo, se convierte la ecuacion en la siguiente

$$x^2+4=0 \quad (6).$$

En esta ecuacion solo se halla la incógnita x con esponente par; y como todos los términos son positivos, resulta en virtud de lo espuesto (276... 5.°) que no tiene ninguna raiz real; por lo que sus dos raices son imaginarias. Veamos como el método nos lo da á conocer. Supongo $x=1$, y obtengo $+5$ de error. Suponiendo $x=2$, da 8 de error; y como el 1 da menor error, hallo su correccion, multiplicando su error por -1; y dividiendo el producto -5 por la diferencia de los errores, que es $8-5=3$, resulta $-1,666$ &c. para la correccion; que, agregada al 1, da $-0,666$ &c.

Tomando $-0,67$ por *tercer número supuesto*,

da $+4,4489$ de error. Para encontrar la correccion al $-0,67$, multiplico su error por $-0,67-1=-1,67$; y dividiendo el producto $-7,429663$ por la diferencia de los dos menores errores, que es $0,5511$, resulta $-13,48$ para la correccion; que, agregada al $-0,67$, da $-14,15$.

Tomando $-14,15$ por *cuarto número supuesto*, da $204,2225$ de error; y como es mayor que todos los anteriores, nos indica que esta ecuacion se halla en el caso del número 10.° de la regla. Para continuar el método, supondrémos $x=10$, $x=100$, $x=1000$, $x=-10$, $x=-100$, $x=-1000$; y como todos estos supuestos dan errores positivos, hallarémos la *ecuacion derivada* de la $x^2+4=0$; lo que se consigue, multiplicando por 2 el primer término, rebajando una unidad á su esponente, suprimiendo el último término; é igualándolo á cero; luego la ecuacion derivada de la anterior será $2x=0$ (6'); que, dividiendo por 2 da $x=0$. Y como sustituyendo 0 por x en la (ec. 6), se convierte en 4, que es resultado positivo como todos los demas, inferimos que la mencionada ecuacion, no tiene ningnua raiz real, siendo por consiguiente las dos imaginarias. Con lo cual, ademas de las aplicaciones al primer grado, tenemos aplicado el método á las ecuaciones de segundo grado, que nos han dado: 1.° dos números positivos; 2.° uno positivo, y otro negativo; 3.° dos números negativos; y por último, hemos aplicado el método á una ecuacion en que no hay ninguna raiz real, sinó que las dos son imaginarias; y como en esta resolucion no hemos empleado mas que las operaciones simples de la Aritmética, como son las relativas tanto á los números enteros como á los decimales, sin hacer ningun uso de la extraccion de raices, queda comprobada en las ecuaciones de 1.° y 2.° grado, la maravillosa utilidad y sencillez de este nuevo método.

Ecuaciones superiores al segundo grado.

290 *P.* ¿Y qué haréis para convencer de sus utilidades en las ecuaciones superiores á las del segundo grado, y hacer ver que el método no reconoce limitacion alguna?

R. Resolver ecuaciones de todos los grados, hallando todas sus raices reales en cuantos casos puedan ocurrir. Principiaré por alguna que haya formado el objeto de las investigaciones mas sublimes de los Matemáticos; y elejiré con este fin la ecuacion á que *Neuton* aplicó su nuevo método de aproximacion de las ecuaciones, y á que *Lagrange* tambien aplicó el suyo, con toda la riqueza de cálculo, propia de un Matemático tan profundo que abraza hasta conocimientos del *Cálculo Infinitesimal.* Mas para que los Discípulos se ejerciten en el plantéo de las ecuaciones, y en simplificarlas, nos contraerémos á la siguiente cuestion, que puede darle orígen.

Séptima cuestion.

Hallar un número tal, que si al quintuplo de su cubo, se le añade el triplo de su cuadrado, y de esto se quita el duplo del mismo número, resulten cinco unidades, mas 6 veces la mitad del cuadrado de dicho número, mas el cuádruplo del cubo del mismo número.

Esta cuestion queda planteada en la ecuacion siguiente $5x^3+3x^2-2x=5+6.\frac{1}{2}x^2+4x^3$; trasladándolo todo al primer miembro, se nos convierte en $5x^3+3x^2-2x-5-6.\frac{1}{2}x^2-4x^3=0$. Para simplificarla, observo que x^3 se halla en dos términos, á saber, en el primero y en el último; y en virtud de lo espuesto (271), deberé restar los coeficientes 5 y 4; y co-

mo $5-4=1$, resulta que $5x^3-4x^3$ es lo mismo que $1x^3$, ó simplemente x^3. La x^2 se halla en el segundo término y en el cuarto con diferente signo; por lo que deberé restar los coeficientes; el coeficiente del primero es 3, y el del segundo es $6.\frac{1}{2}$; y como $6.\frac{1}{2}=\frac{6}{2}=3$, resulta que el conjunto de estos dos términos es $3x^2-3x^2$, que equivale á o; porque si de una cosa cualquiera, que esté representada por $3x^2$, se quita ella misma, no queda nada. El $-2x$ y el -5 no suministran ninguna simplificacion, y queda reducida la ecuacion á $x^3-2x-5=0$ (7), que es la que el inmortal *Neuton* se propuso resolver por su método de aproximacion, sin mas diferencia, que usar él de la y, en vez de la x para señalar la incógnita; y la misma tambien que resuelve el célebre *Lagrange* en el cap. IV de su *Tratado de las ecuaciones numéricas de todos los grados*. Para que, desde luego se conciban las ventajas de nuestro método sobre todos los demas, basta observar que el célebre *Lagrange* en el suyo, empléa todos los conocimientos mas sublimes de las Matemáticas, inclusos los de los coeficientes diferenciales; y aquí nosotros vamos á resolverla, sin hacer uso de otros procedimientos, que las simples operaciones de Aritmética con los números enteros y decimales.

Antes de aplicarle el método, observaré que, siendo esta ecuacion del 3.er grado, es de grado *impar*, por consiguiente (276...1.°) tiene al ménos una raiz real de signo contrario al de su último término. Luego dicha ecuacion tendrá, al ménos una raiz real y positiva.

Para aplicar el método á dicha ecuacion, supongo $x=1$; y el primer miembro se convierte en $(1)^3-2\times1-5$; y como $(1)^3=1\times1\times1=1$, y $-2\times1=-2$, esta espresion se transforma en $1-2-5=1-7=-6$.

Suponiendo $x=2$, en el primer miembro de di-

cha ecuacion, se tiene $(2)^3-2\times2-5$; y como $(2)^3=2\times2\times2=8$, y $-2\times2=-4$, la espresion anterior se convertirá en $8-4-5=8-9=-1$. Luego la equivocacion es -1, que tiene menor valor numérico que la que dió el 1, que era -6. Para encontrar la correccion, que se debe hacer al número 2, multiplico su error -1 por la unidad positiva; lo que da $-1\times+1=-1$. Esto lo debo dividir por la diferencia de los dos errores, sirviendo de sustraendo el menor error numérico, esto es, por $-6-(-1)=-6+1=-5$; y ejecutando la division de -1 por -5, resulta 0,2 para la correccion. Y como este resultado tiene el signo positivo, se debe añadir al número 2, que fué el que dió el menor error númérico y se tiene; $2+0,2=2,2$.

Tomemos este valor 2,2 por *tercer número supuesto*, y sustituyéndole en el primer miembro de dicha ecuacion, se convertirá en $(2,2)^3-2\times2,2-5$; y como $(2,2)^3=2,2\times2,2\times2,2=10,648$, y $-2\times2,2=-4,4$, tendrémos $10,648-4,4-5=10,648-9,4=+1,248$, que espresa el error ó equivocacion.

Aquí observo, que este error es positivo; y como el que dió el supuesto 2, era negativo, infiero (276...7.º) que entre 2 y 2,2 hay al ménos una raiz real; esto es, que una de las raices ha de ser por precision mayor que 2 y menor que 2,2. Como el error, que da el supuesto 2, es menor que el del 2,2, debo hallar la correccion que se debe hacer al espresado número 2. A cuyo efecto, multiplico dicho error -1 por $2-2,2=-0,2$; y será $-1\times-0,2=+0,2$. Esto lo divido por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, esto es, por $1,248-(-1)=1,248+1=2,248$; y obtengo 0,0889 para la correccion; que, agregada al 2, da 2,0889.

Tomando (283) 2,089 por *cuarto nùmero supuesto*; y sustituyéndole en el primer miembro de la ecuacion, le convertirá en

$9,116230969-4,178-5=9,116230969-9,178=\ldots$ $-0,061769031$, que será la equivocacion; la cual tiene un valor numérico menor qué todas las equivoca-

ciones anteriores; y como el error del 2 es menor que el de 2,2, para encontrar la correccion, que conviene hacer al número supuesto 2,089, multiplico su error por 2,089—2=0,089; y ejecutándolo, será —0,061769031×0,089=—0,005497443759. Esto lo debo dividir por la diferencia de los dos menores errores, tomando por sustraendo el menor de todos. Luego el divisor será

—1— —0,061769031=—1+0,061769031=....

—0.938230969; y practicando la division, obtengo por cociente +0,00585, que será la correccion; la cual, agregada al número supuesto 2,089, le convertirá en 2,09485.

Tomemos este valor 2,09485 por *quinto número supuesto*, y sustituido en el primer miembro de la ecuacion, se convertirá en 0,003332455159725, que es el error; y como este es positivo, y el del 2,089 resultó negativo, infiero (276...7.°) que una raiz al ménos se halla entre 2,089 y 2,09485. Como el error del 2,09485 es menor que el anterior, para hallar la correccion que se debe hacer al número supuesto 2,09485 de que proviene, multiplico su error, suprimiendo (*) los seis últimos guarismos, por 2,09485—2,089=0,00585; y practicando la multiplicacion se tendrá por producto 0,0000194948617 5. Esto lo debo dividir por la diferencia de los dos menores errores, que tomando solo nueve guarismos en ambos (lo que no producirá error á lo mas, sinó en el guarismo octavo del cociente, será como se vé al frente

(*) Dicho error contiene 15 guarismos decimales; y como el multiplicador tiene cinco guarismos decimales, el producto deberá tener veinte guarismos decimales; pero como no necesitamos tantos, podemos hacer dicha supresion, sin que se altere el resultado, bien que, aunque esto se verificase algun tanto, en virtud de lo espuesto (283), nada importaría.

Al hacer las operaciones de dividir, se puede hallar el resultado en muchas ocasiones con gran brevedad, suprimiendo en dividendo y divisor igual número de guarismos

$-0,061769031-0,003332455=-0,065101486.$
Practicando la division de 0,00001949486175 por $-0,065101486$, resulta $-0,0002994$ para la correccion; que, agregándola al último número supuesto, da

$2,09485-0,0002994=2,0945506.$

Tomemos este valor 2,0945506 por *sesto nùmero supuesto*; y sustituyéndole en el primer miembro de la ecuacion, se nos convertirá en $-0,00000983927489838 5784$, que será el error ó equivocacion; el cual siendo negativo, y el del 2,09485 habiendo resultado positivo, indica que entre 2,0945506 y 2,09485 hay al ménos una raiz real; y como el error del 2,0945506 es menor que el anterior, para encontrar la correccion, multiplico este error por $2,0945506-2,09485=-0,0002994$. Al ejecutar la multiplicacion, suprimo en el error los seis últimos guarismos, y obtengo por producto el número 0,00000000294587890446l2. Esto lo divido por la diferencia de los dos menores errores, tomando en ellos únicamente, los doce primeros guarismos decimales, pues esto nos dará exacto el resultado, lo ménos con diez ú once guarismos; y observando que, pues el menor de todos tiene el signo —, deberá sumarse con el anterior; el divisor será 0,003949294433, y obtendré 0,000000881 4 para la correcion; que, agregada al último número supuesto, da $2,0945506+0,0000008814=2,0945514814$; cuyo valor es mas exacto que el sacado por *Neuton*; pues comprueba justamente lo que dice *Lagrange*, de ser

---

decimales; y aun de guarismos enteros, si estos son muchos y los que se quieren hallar en el cociente son pocos.

Supongamos que se tenga que dividir el número 1953105901,3784 por 413938465,527000271 68, y que tengamos necesidad solo de un guarismo en el cociente. En este caso, podemos despreciar no solo todos los guarismos decimales, sinó hasta ocho guarismos en enteros; y siempre se obtiene 4 por cociente. La razon se halla (§. 197 *n*) del tomo 1.° del Compendio de Matemáticas.

menor que 2,09455149 y mayor que 2,09455147; puesto que el guarismo que en nuestro resultado ocupa el octavo lugar es 8, que justamente se halla entre el 9 y el 7 de los valores hallados por *Lagrange*, siendo 7 el que saca *Neuton*, como puede verse en el (§. 170i T 1.) de la tercera edicion del *Compendio de Matemáticas*. Sabemos por otra parte, que nuestro resultado es exacto hasta el décimo lugar decimal; pues que habiendo calculado otro número supuesto, la correccion no tiene ningun valor en el décimo lugar decimal. Donde vemos que este nuevo método nos ha conducido á los mísmos resultados que habían obtenido ya los sapientísimos y celebérrimos Matemáticos *Neuton y Lagrange* con mucho mas lujo científico, y con muchas mas penalidades y fatigas, que las que nosotros hemos empleado.

291. Vemos, pues, que esta raiz es real y positiva, como desde luego anunciamos; y tambien se ha comprobado que es mayor que 2, y menor que 2,2, y tambien mayor que 2,0945506 y menor que 2,09485 segun acabamos de asegurar.

Para encontrar las otras dos raices, divido el primer miembro de la ecuacion propuesta, por $x-2,0945514814$; é igualando el cociente á cero, resulta $x^2+2,0945514814x+2,3871459082З=0$ (7′).

Para aplicarle el método, supongo $x=1$, lo que da $+5,4816973896$ de error. El supuesto $x=2$, da $+10,576248871$ de error. El menor de estos es el que proviene del 1; luego deberé hallar la correccion que corresponde á este número. A cuyo efecto, multiplico dicho menor error, por la unidad negativa; y tomando solo seis guarismos decimales, da por producto $-5,481697$. Esto lo divido por la diferencia de los dos errores; que tomando tambien únicamente seis guarismos decimales, es 5,094551; lo que da $-1,07$ para la correccion al 1; y agregándosela, resulta $-0,07$.

Tomando $-0,07$ por *tercer número supuesto*, y apreciando únicamente los primeros seis guarismos decimales de los coeficientes numéricos, resulta 2,245427

de error; que, siendo menor que todos, debo hallar la correccion al $-0{,}07$. Para esto, multiplico dicho menor error por $-0{,}07-1=-1{,}07$, y tengo $-2{,}4026689$. Este producto lo divido por la diferencia de los dos menores errores, que es $3{,}236270$; lo que da $-0{,}74$ para la correccion; que, agregada al $-0{,}07$, da $-0{,}07-0{,}74=-0{,}81$.

Tomando $-0{,}81$ por *cuarto número supuesto*; y apreciando únicamente los seis primeros guarismos decimales, resulta $4{,}739831$ de error; y como es mayor que los errores del 1 y del $-0{,}07$, y del mismo signo, infiero que la (ec. 7′) se halla en el caso del número 10.° de la regla. En efecto, si se intentára encontrar le correccion, se debería multiplicar el menor error numérico de todos, que es $2{,}45427$, por la diferencia de los dos números que produjeron menores errores, que es $-0{,}07-1=-1{,}07$; y este producto se deberá dividir por la diferencia de los dos menores errores, que es $3{,}236270$; y como estos son justamente los datos que han suministrado el último número supuesto $-0{,}81$, seríamos conducidos al mismo resultado $-0{,}81$; y aunque practicásemos la regla un millon de veces, no adelantaríamos un paso.

Para examinar si á pesar de esto, hay alguna raiz real, supondrémos $x=10$, $x=100$, $x=1000$ &c.; y como se van obteniendo errores, cada vez mayores y positivos, así como suponiendo $x=-1$, $x=-10$, $x=-100$, $x=-1000$ &c., no hay esperanza de que por este medio haya cambio de signo, y será preciso emplear el último recurso, que es el de la ecuacion derivada.

292. Hallando la ecuacion derivada de la (ec. 7′), será $2x+2{,}0945514814=0$ (7′)′; que, dividida por 2, se tiene $x+1{,}0472757407$; y trasladando será $x=-1{,}047$ &c. que podrémos tomar por $x=-1{,}05$. Sustituyendo este valor en la (ec. 7′), resulta que el primer miembro se convierte en un valor positivo, como todos los demas; por lo que no habiendo esperanza ninguna de cambio de signo, las dos raices de la (ec. 7′) son imaginarias; y por consiguiente la ecua-

cion de *Neuton*, que es la (ec. 7), solo tiene la raiz real que hemos sacado 2,0945514814.

293 *P.* ¿Me podréis aplicar este nuevo método á ecuaciones que se resistan á los otros métodos conocidos?

R. Sí señor, vamos á resolver toda especie de ecuaciones, eligiendo *esprofeso* algunas para que comprendan toda clase de raices, y de dificultades; las que procurarémos ir graduando para proceder con órden.

Ante todas cosas nos propondrémos la ecuacion del 4.° grado siguiente.

$$x^4-28x^3+252x^2-864x+16=0 \quad (8).$$

Esta ecuacion es digna de considerarse; porque el primer miembro, tomado con los signos contrarios, se ha encontrado en el tomo 2.° parte 2.ª del *Tratado Elemental de Matemáticas*, que contiene el *Cálculo Diferencial é Integral*, páginas (251 y 266), que tiene un valor *máximo*, (esto es, un valor que es mayor que los valores que le preceden y siguen inmediatamente) cuando $x=3$; que cuando $x=6$, tiene un valor *mínimo* (esto es, un valor que es menor que los que le preceden y siguen inmediatamente); y que cuando $x=12$ hay tambien un valor *máximo*.

Como esta ecuacion es del 4.° grado, y su último término es positivo, resulta en virtud de lo espuesto (276... 6.°) que podrá tener sus cuatro raices reales, sus cuatro raices imaginarias, ó dos raices reales y dos raices imaginarias.

294. Para aplicar, pues, el método á la (ec. 8), supongo $x=1$; lo que da -623 de error; suponiendo $x=2$, se tiene -912 de error; y como el error del 1 es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por -1; y dividiendo el producto $+623$ por la diferencia de los errores, que es -289, resulta -2 para la correccion; que, agregada al 1, da -1.

Tomando -1 por *tercer número supuesto*, da $+1161$ de error; que, siendo ya positivo, indica que entre 1 y -1 hay al ménos una raiz real; y como el error del 1 es menor, hallo su correccion, multipli-

cando su error por 1— —1=2; y dividiendo el producto —1246 por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es +1784, resulta —0,7 para la correccion; que, agregada al 1, da 0,3.

Tomando 0,3 por *cuarto número supuesto*, da —221,2679 de error; que, siendo negativo, indica que entre —1 y 0,3 hay al ménos una raiz real; y como el error del 0,3 es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por 0,3— —1=1,3; y dividiendo el producto —287,64827 por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es +1382,2679, sesulta —0,2 para la correccion; que, agregada al 0,3, da 0,1.

Tomando 0,1 por *quinto número supuesto*, da —67,907 de error; que, siendo negativo, indica, que entre 0,1 y —1 hay al ménos una raiz real; y como el error del 0,1 es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por 0,1— —1=1,1; y dividiendo el producto —74,6977 por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es +1228,907, resulta —0,06 para la correccion; que, agregada al 0,1, da 0,04.

Tomando 0,04 por *sesto número supuesto*, da —18,15 &c. (*) de error; que siendo negativo, indica que entre 0,04 y —1, hay al ménos una raiz real; y como el error del 0,04 es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por 0,04— —1=1,04; y dividíendo el producto —18,8 &c. por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es +1179,1 &c., resulta —0,016 para la correccion; que, agregada al 0,04, da 0,024.

Tomando 0,02 por *séptimo número supuesto*, da —0,27 &c. de error; que, siendo negativo, indica que entre 0,02 y —1, hay al ménos una raiz real; y co-

---

(*) En virtud de la observacion hecha (nota del §. 290) podemos suprimir varios guarismos decimales, sin que esto cause inexactitud en los resultados, segun se necesitan apreciar.

mo el error del 0,02 es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por 0,02— —1=1,02; y dividiendo el producto —0,2776 &c. por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es +1161,2 &c., resulta —0,0002 para la correccion; que, agregada al 0,02, da 0,0198; y como ya la correccion es tan pequeña, tomarémos este valor 0,0198 por raiz de la espresada ecuacion (*).

(*) Aquí vemos que estas correcciones son tan pequeñas, porque el supuesto $x=-1$, da por error +1161 que es considerablemente mayor, que los errores del 0,3, del 0,1, del 0,04, y del 0,02. Si hiciéramos el supuesto $x=0$, tendríamos que todos los términos de la ecuacion, se reducian á 0 escepto el último, que es el término constante 16; luego el error es 16, y como es positivo, y resultó negativo el error del supuesto 1, indica que entre 1 y 0 hay al ménos una raiz real, y como el error del supuesto 0 es numéricamente menor, hallo la correccion al 0, multiplicando su error 16 por 0—1=—1; y dividiendo el producto —16 por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es —623—16=—639, resulta +0,02 para la correccion; que, agregada al 0, da +0,02.

Tomando 0,02 por otro número supuesto, hubiéramos hallado —0,277 &c., de error; que, siendo negativo, y habiendo resultado positivo el del supuesto 0, indica que entre 0 y 0,02 hay al ménos una raiz real; y como el error del 0,02 es numéricamente menor, hallo la correccion al 0,02, multiplicando su error por 0,02—0=0,02; y dividiendo el producto —0,0054 por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es 16,27 &c. resulta —0,0003 para la correccion; que, agregada á 0,02, da 0,0197, que se puede tomar igualmente por la verdadera raiz.

Haciendo el supuesto de $x=0$, cuando los supuestos se hallan espresados por decimales ó van á pasar á ser negativos, pudiéramos haber abreviado muchos casos; pero atendiendo á que esto en algunas ocasiones podria haber dado orígen á cabilosidades y sutilezas, hemos preferido seguir el método sin hacer uso de este supuesto; pero tampoco hemos querido dejar de indicarlo, por si alguno quiere hacer uso de este supuesto.

Para encontrar las demas, dividirémos el primer miembro de la (ec. 8) por $x-0{,}0198$; lo que vamos á efectuar todavía con la competente esplicacion, para que se adqüiera bien la práctica. Colocaré el divisor á la derecha del dividendo, con una raya intermedia, de arriba abajo, y con otra debajo del divisor; y principiaré dividiendo

x^4-28x^3+	$252x^2-$	$864x$	$+16$	$x-0{,}0198$
$\perp+0{,}0198x^3-$	$0{,}55400796x^2+$	$4{,}9786306423 92x$		$x^3-27{,}9802x^2$
$-27{,}9802x^3$	$+251{,}44599204x^2$	$-859{,}02136935 7608x$		$+251{,}44599204x$
$\perp$	$\perp$	$\perp$		$-859{,}021369357608$
			$-17{,}0086$ &c.	
			$-1{,}0086$ &c.	

x^4 por x; lo que da x^3 en el cociente; y borro ó tacho el x^4 del dividendo, lo que indico en el impreso poniendo debajo de x^4 el signo $\perp$. Multiplico el cociente x^3 por el segundo término del divisor; y mudando el signo al producto, tengo $+0{,}0198x^3$ que pongo debajo del $-28x^3$ del dividendo; haciendo la reduccion de los dos términos que están en columna $-28x^3+0{,}0198x^3$, resulta $-27{,}9802x^3$, que pongo debajo de la raya que he tirado por la parte inferior de dichos términos. Ahora divido el $-27{,}9802x^3$ por x, primer término del divisor; lo que da por cociente $-27{,}9802x^2$, que pongo en el cociente á la derecha del x^3. Tacho el $-27{,}9802x^3$ del dividendo, lo que indico en el impreso, poniendo debajo el signo $\perp$. Multiplico el $-27{,}9802x^2$ por $-0{,}0198$, y obtengo por producto, despues de mu-

dado el signo, $-0{,}55400796x^2$, que pongo debajo del $+252x^2$, Para hacer la reduccion no tengo mas que restar el coeficiente 0,55400796, del 252, y resulta debajo de la raya $+251{,}44599204x^2$. Continúo la operacion, dividiendo esto por x, y resulta para tercer término del cociente $+251{,}44599204x$ que pongo en el cociente; y despues tacho ó borro el $+251{,}44599204x^2$ que me ha servido de dividendo parcial; lo que indico en el impreso, poniendo debajo de dicho término el signo $\perp$.

Multiplico el $+251{,}44599204x$ por $-0{,}0198$, y mudando el signo al producto, tengo $+4{,}978630642392x$, que coloco debajo del $-864x$; y tirando una raya por la parte inferior, verifico la reduccion, restando el coeficiente 4,978630642392, del -864 poniendo el signo $-$ á la resta, y la x; por lo que tengo debajo de la raya $-859{,}021369357608x$; continúo la operacion, dividiendo esto por x, lo que da por cociente $-859{,}021369357608$; y tacho el término que me ha servido de dividendo; lo que indico en el impreso, poniendo debajo el signo $\perp$. Multiplico despues este cociente, qué acabo de hallar, por $-0{,}0198$; y mudando el signo al producto, pongo $-17{,}0086231132806384$ debajo del último término 16; y hecha la destruccion, solo queda $-1{,}008$ &c. por resta; lo que se debe reputar por bastante exacto.

295. Igualando á cero el cociente, y tomando para mayor sencillez solo cuatro guarismos decimales en los dos últimos términos, se tendrá

$$x^3-27{,}9802x^2+251{,}4460x-859{,}0214=0 \quad (8').$$

Para aplicarle el método, supondré $x=1$; lo que da $-634{,}5956$ de error; suponiendo $x=2$, da $-460{,}0502$ de error; y como es menor que el anterior, hallo la correccion al 2, multiplicando su error por 1; y dividiendo el producto $-460{,}0502$ por la diferencia de los errores, que es $-174{,}5454$, resulta 2,6 para la correccion; que, agregada al 2, da 4,6.

Tomando 5 por *tercer número supuesto*, da $-176{,}2864$ de error; y como es menor que todos,

hallo su correccion, multiplicando su error por 5—2=3; y dividiendo el producto —528,8532 por la diferencia de los dos menores errores, que es —283,7638, resulta 1,8 para la correccion; que, agregada al 5, da 6,8.

Tomando 7 por *cuarto número supuesto*, da —126,9292 de error; y como es menor que todos, hallo la correccion al 7, multiplicando su error por 7—5=2; y dividiendo el producto —253,8584, por la diferencia de los dos menores errores, que es —49,3572, resulta 5 para la correccion; qne, agregada al 7, da 12.

Tomando 12 por *quinto número supuesto*, da —142,8282 de error; y como es mayor que el del 7, busco la correccion al 7, multiplicando su error por 7—12=—5; y dividiendo el producto 634,646 por la diferencia de los dos menores errores, que es —15,899, resulta —39,8 para la correccion; que, agregada al 7, da —32,8.

Tomando este valor por *sesto número supuesto*, resulta un error numéricacamente mayor que los anteriores; por lo que infiero, que nos hallamos en el caso del número 10.º de la regla. Por lo que procederémos á suponer $x=10$, que da —132,5814 de error; suponiendo $x=100$, da +744483,6 de error; que, siendo ya positivo, y habiendo resultado negativo el error del supuesto 12, indica que entre 12 y 100 hay al ménos una raiz real; y como el supuesto 100 da un error considerabilísimamente mayor que el del 12, harémos un supuesto intermedio, á saber $x=40$; lo que nos da +28430,4986 de error; que, siendo positivo, indica que una raiz á lo ménos se halla entre 12 y 40. Y como el error del 40 es todavía considerablemente mayor que el del 12, hago otro supuesto intermedio, eligiendo $x=20$; lo que da +977,8186 de error; que, siendo positivo, indica que entre 12 y 20 hay á lo ménos una raiz real. Y como el error del 12 es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por 12—20=—8; y dividiendo el producto +1142,9756

por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es +1120,6468, resulta 1 para la correccion; que, agregada al 12, da 13.

Tomando 13 por *undécimo número supuesto*, da —120,8772 de error; que, siendo negativo, indica que entre 13 y 20 hay al ménos una raiz real; y como el error del 13 es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por 13—20=—7; y dividiendo el producto +846,1404 por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es +1098,6978, resulta 0,77 para la correccion; que, agregada al 13, da 13,77.

Tomando 14 por *duodécimo número supuesto*, da —78,896 de error; que, siendo negativo, indica que entre 14 y 20 hay al ménos una raiz real; y como el error del 14 es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por 14—20=—6; y dividiendo el producto +473,376 por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es +1056,7146, resulta 0,4 para la correccion; que, agregada al 14, da 14,4.

Tomando 14,4 por *décimo tercero número supuesto*, da —43,18 &c. de error; hallo la correccion al 14,4, multiplicando su error por 14,4—20=—5,6; y dividiendo el producto +241,8 &c. por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es +1021,00787, resulta 0,2 para la correccion; que, agregada al 14,4, da 14,6.

Tomando 15 por *décimo cuarto número supuesto*, da —7,9764 de error: hallo la correccion al 15, multiplicando su error por 15—20=—5; y dividiendo el producto +39,382 por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es 985,7950, resulta 0,03 para la correccion; que, agregada al 15, da 15,03.

Tomando 15,03 por *décimo quinto número supuesto*, da —5,014253 de error; hallo la correccion al 15,03, multiplicando su error por 15,03—20=—4,97; y dividiendo el producto +24,9 &c. por la diferencia

de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es $+982,8$ &c. resulta $0,02$ para la correccion; que, agregada al $15,03$, da $15,05$.

Tomando $15,1$ por *décimo sesto número supuesto*, da $+0,999680$ de error; que, siendo ya positivo, indica que entre $15,03$ y $15,1$ hay al ménos una raiz real; hallo la correccion al $15,1$ multiplicando su error por $15,1-15,03=0,07$; y dividiendo el producto $-0,0697760$ por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es $+6,013933$, resulta $-0,01$ para la correccion; que, agregada al $15,1$, da $15,09$; que podrémos tomar por raiz de la (ec. $8'$).

296 Para encontrar las demas, divido el primer miembro de la (ec. $8'$) por $x-15,09$; é igualando á 0 el cociente, resulta $x^2-12,8902x+56,932882=0$; que suprimiendo los dos últimos guarismos decimales del coeficiente del segundo término, en atencion á su pequeñez, y los cuatro últimos del tercer término, por la misma razon, se convertirá en

$$x^2-12,89x+56,93=0 \quad (8'').$$

Para aplicarle el método, supongo $x=1$, lo que da $+45,04$ de error. Supongo $x=2$, y se tiene $+35,19$ de error; y como este es menor, hallo la correccion al 2, multiplicando su error por 1; y dividiendo el producto $+35,19$ por la diferencia de los dos errores, que es $+9,85$, resulta $3,5$ para la correccion; que, agregada al 2, da $5,5$.

Tomando 6 por *tercer número supuesto*, da $+15,59$ de error; y como es menor que todos, hallo la correccion al 6, multiplicando su error por $6-2=4$; y dividiendo el producto $+62,36$ por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es $+19,14$, resulta 3 para la correccion; que, agregada al 6, da 9.

Tomando 9 por *cuarto número supuesto*, da $25,92$ de error; y como es mayor que el del 6, hallo la correccion al 6, multiplicando su error por $6-9=-3$;

y dividiendo el producto $-46,77$ por la diferencia de los dos menores errores, que es $+6,33$, resulta -7 para la correccion; que, agregada al 6, da -1.

Tomando -1 por *quinto número supuesto*, da 43,04 de error; que, siendo mayor que los dos anteriores, y del mismo signo, manifiesta que nos hallamos en el caso del número 10° de la regla.

297 Para averiguar desde luego si hay alguna raiz real, hallarémos la ecuacion derivada de la (ec, 8″) que, igualándole á cero, se tiene $2x-12,89=0$; que

da $x=\frac{12,89}{2}=6,445$.

Sustituyendo este valor en la (ec. 8″), se tiene $41,538025-83,07605+56,93=5,391975$; que, siendo positivo como todos los demas, indica que la (ec. 8″) no tiene ninguna raiz real; por lo que todas son imaginarias; luego la (ec. 8) solo tiene dos raices reales, á saber, $x=0,0198$ y $x=15,09$, quedando comprobado lo que hemos anunciado al principio solo por la inspeccion de la (ec. 8.)

298 Para proceder ahora á una ecuacion del quinto grado, nos propondrémos la siguiente cuestion: *Hallar un número tal, que si á su quinta potencia se le añade ochocientas setenta y ocho veces su cuadrado, y de esto se quitan quice mil y quince unidades, resulte siete veces la cuarta potencia del mismo número; mas ciento sesenta y dos veces el cubo del mismo número, ménos tres mil novecientas treinta y siete veces el mismo número.*

En virtud de lo espuesto (270), queda planteada esta cuestion en la ecuacion siguiente

$$x^5+878x^2-15015=7x^4+162x^3-3937x:$$

que trasladándolo todo al primer miembro y ordenando, se convierte en

$$x^5-7x^4-162x^3+878x^2+3937x-15015=0 \quad (9).$$

Esta ecuacion siendo de grado impar, resulta (276...1.°) que tiene al ménos una raiz real, y positiva.

Para aplicarle el método, supongo $x=1$; lo que da -10368 de error. Suponiendo $x=2$, se tiene -4995 de error. Y como este es numéricamente menor, hallo la correccion al 2, multiplicando su error por 1; y dividiendo el producto -4995 por la diferencia de los errores, que es -5373, resulta 0,9 para la correccion; que, agregada al 2, da 2,9.

Tomando 3 por *tercer número supuesto*, da o de error; luego (271...6.ª) el número 3 es raiz de la espresada ecuacion.

299 Para encontrar las demas, divido el primer miembro de la mencionada (ec. 9), por $x-3$; é igualando á o el cociente, resulta

$$x^4-4x^3-174x^2+356x+5005=0 \quad (9');$$

Para aplicarle el método, supongo $x=1$; lo que da $+5184$ de error. Suponiendo $x=2$, resulta $+5005$ de error; que, siendo menor que el del 1, hallo la correccion al 2, multiplicando su error por 1; y dividiendo el producto 5005 por la diferencia de los errores, que es 183, resulta 27 para la correccion; que, agregada al 2, da 29.

Tomando 29 por *tercer número supuesto*, da $+478720$ de error; que, siendo positivo y mayor que todos, nos indica que estamos en el caso del número 10.° de la regla; por lo que harémos $x=100$; lo que da $+4290595$ de error; $x=1000$, da $+995998300605$ de error; y como de suponer $x=10000$, $x=100000$, &c, iríamos obteniendo errores mayores y positivos, indica que por valores positivos de x, no hay que esperar cambio de signo; por lo que pasarémos á los supuestos negativos. $x=-1$, da $+4480$ de error, $x=-10$, da -9955 de error; que, siendo ya negativo, indica que entre -1 y -10 hay al ménos una raiz real; y como el error del -1 es numéricamente menor, hallo la correccion al -1, multiplicando su error por $-1--10=-1+10=9$; y dividiendo el producto $+49280$ por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es -14435, resulta

—3 para la correccion; que, agregada al —1, da —4.

Tomando —4 por *tercer número supuesto*, respecto de esta combinacion, resulta +1309 de error; que, siendo positivo, indica que entre —4 y —10 hay al ménos una raiz real; y como el error del —4 es numéricamente menor, hallo la correccion, multiplicando su error, por —4— —10=—4+10=+6; y dividiendo el producto +18326 por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es —11264, resulta —1 para la correccion; que, agregada al —4, da —5.

Tomando —5 por *cuarto número supuesto*, da o de error; por lo que —5 es raiz de la (ec. 9′), y tambien de la (ec. 9).

300 Para encontrar las demas, divido el primer miembro de la (ec. 9′) por $x+5$; é igualando á *cero* el cociente, se tiene $x^3-9x^2-129x+1001=0$ (9′′).

Para aplicarle el método, supongo $x=1$; lo que da +864 de error. Suponiendo $x=2$, se tiene +705 de error; y como este es el menor, hallo la correccion al 2, multiplicando su error por 1; y dividiendo el producto +705 por la diferencia de los errores, que es 159, resulta 4 para la correccion; que, agregada al 2, da 6.

Tomando 6 por *tercer número supuesto*, da 119 de error; que, como es menor que todos, hallo la correccion al 6, multiplicando su error por 6—2=4; y dividiendo el producto +476 por la diferencia de los dos menores errores, que es 586, da 0,8 para la correccion; que, agregada al 6, da 6,8.

Tomando 7 por *cuarto número supuesto*, da o de error; por lo que 7 es raiz de la (ec. 9′′) y tambien de las (ecs. 9′ y 9).

301. Para encontrar las demas, divido el primer miembro de la (ec, 9′′) por $x-7$; é igualando á o el cociente, se tiene $x^2-2x-143=0$ (9′′′).

Para aplicarle el método, supongo $x=1$; lo que da —144 de error. Suponiendo $x=2$, da —143 de error; y como este es menor, hallo su correccion, mul-

tiplicando su error por 1; y dividiendo el producto −143 por la diferencia de los errores, que es −1, resulta +143 para la correccion; que, agregada al 2, da 145.

Tomando 145 por *tercer número supuesto*, da +20592 de error; que, siendo positivo, indica, que entre 2 y 145 hay al ménos una raiz real; y como el error del 145 es enormemente mayor que el del 2, hago como supuesto intermedio $x=100$; lo que da +9657 de error; y como todavía este error es mucho mayor que el del 2, hago otro supuesto intermedio $x=50$; lo que da +2457 de error; y como todavía este error dista bastante del del 2, hago otro supuesto intermedio, á saber $x=20$; lo que da +217 de error; que, teniendo ya el mismo número de guarismos que el error del 2, que es el menor, hallo la correccion al 2, multiplicando su error por 2−20=−18; y dividiendo el producto +1574 por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es +360, resulta 4 para la correccion; que, agregada al 2, da 6.

Tomando 6 por *séptimo número supuesto*, da −119 de error; que, siendo negativo, indica que entre 6 y 20 hay al ménos una raiz real; y como el error del 6 es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por 6−20=−14; y dividiendo el producto +1666 por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es +336, resulta 5 para la correccion; que, agregada al 6, da 11.

Tomando 11 por *octavo número supuesto*, da −44 de error; que, siendo negativo, indica que entre 11 y 20 hay al ménos una raiz real; y como el error del 11 es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por 11−20=−9; y dividiendo el producto +396 por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es 261, resulta 1,5 para la correcion; que, agregada al 11, da 12,5.

Tomando 13 por *noveno número supuesto*, resulta o de error; por lo que se infiere, que 13 es raiz de

la (ec. $9'''$), y tambien de las (ecs. $9''$, $9'$ y 9).

302 Para encontrar la otra raiz de la (ec. $9'''$), divido su primer miembro por $x-13$; é igualando á *cero* el cociente, se tiene $x+11=0$; que, trasladando, resulta $x=-11$.

Luego las raices reales de la (ec. 9) son

$$x=+3;\ x=-5;\ x=+7;\ x=-11 \text{ y } x=+13.$$

Donde observamos, que la cuestion nos decía, que *se pedia un número*; y aquí hemos hallado *cinco números* que satifacen á la cuestion, como podrá comprobar el que guste.

303 Para ecuacion del grado 6.º elegiré la siguiente

$$x^6-51x^5-973x^4+65643x^3-514908x^2-294576x....$$
$$-2363904=0\ (10).$$

Para aplicarle el método, supongo $x=1$; lo que da -575578 de error. Suponiendo $x=2$, da -9826480 de error; y siendo este mayor, hallo la correcion al 1, multiplicando su error por -1; y dividiendo el producto $+575578$ por la diferencia de los dos errores, que es -4066902, resulta $-1{,}4$ para la correccion; que, agregada al 1, da $-0{,}4$.

Tomando $-0{,}4$ por *tercer número supuesto*, da $-1272215{,}1968$ de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al $-0{,}4$, multiplicando su error por $-0{,}4-1=-1{,}4$; y dividiendo el producto $+1781101{,}27552$ por la diferencia de los dos menores errores, que es $-4687362{,}8032$, resulta $-0{,}4$, para la correccion; que, agregada al -4, da $-0{,}8$.

Tomando -1 por *cuarto número supuesto*, da 0 de error; por lo que inferimos que -1 es raiz de la espresada (ec. 10).

304. Para encontrar las demas, divido el primer miembro de dicha (ec. 10), por $x--1=x+1$; é igualando el cociente á cero, se tiene

$$x^5-52x^4-921x^3+66564x^2-581472x....$$
$$-2363904=0\ (10').$$

Para aplicarle el método, supongo $x=1$; lo que da -2879784 de error. Suponiendo $x=2$, se tiene -3268760 de error; y como este es mayor, hallo la correccion al 1, multiplicando su error por -1; y dividiendo el producto $+2879784$ por la diferencia de los dos errores, que *es* -388976, resulta -7 para la correccion; que, agregada al 1, da -6.

Tomando -6 por *tercer número supuesto*, da $+3531000$ de error; que, siendo positivo, indica que entre 1 y -6 hay al ménos una raiz real; y como el error del 1 es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por $1--6=7$; y dividiendo el producto -20158488 por la diferencia de los dos errores mas próximos ds signos contrarios, que es $+6410784$, resulta -3 para la correccion; que, agregada al 1, da -2.

Tomando -2 por *cuarto número supuesto*, da -928200 de error; que, siendo negativo, indica que entre -2 y -6 hay al ménos una raiz real; y como el error del -2, es numéricamente menor, hallo su correccion, multiplicando su error por $-2--6=-2+6=4$; y dividiendo el producto -3712800, por la diferéncia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es 4459200, resulta $-0{,}8$ para la correccion; que, agregada al -2, da $-2{,}8$.

Tomando -3 por *quinto número supuesto*, da 0 de error; por lo que infiero, que -3 es raiz de la (ec. 10′), y tambien de la (ec. 10).

305. Para encontrar las otras, divido el primer miembro de la (ec. 10′) por $x--3=x+3$; é igualando á *cero* el cociente, se tiene

$$x^4-55x^3-756x^2+68832x-787968=0 \; (10'').$$

Para aplicarle el método, supongo $x=1$; lo que da -719936 de error; $x=2$, da -652240 de error; y como este es menor, hallo la correccion al 2, multiplicando su error por 1: y dividiendo el producto -652240 por la diferencia de los dos errores, que es

—67696, resulta 9,6 para la correccion; que, agregada al 2, da 11,6.

Tomando 12 por *tercer número supuesto*, se tiene —145552 de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al 12, multiplicando su error por 12—2=10; y dividiendo el producto —1455520, por la diferencia de los dos menores errores, que es —506688, resulta +2,8 para la correccion; que, agregada al 12, da 14,8.

Tomando 15 por *cuarto número supuesto*, resulta —60588 de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al 15, multiplicando su error por 15—12=3; y dividiendo el producto —181764, por la diferencia de los dos menores errores, que es, —84964, resulta 2 para la correccion; que, agregada al 15, da 17.

Tomando 17 por *quinto número supuesto*, da —23002 de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al 17, multiplicando su error por 17—15=2; y dividiendo el producto —46004 por la diferencia de los dos menores errores, que es —37586, resulta +1 para la correccion; que, agregada al 17, da 18.

Tomando 18 por *sesto número supuesto*, da —9820 de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al 18, multiplicando su error por 18—17=1; y dividiendo el producto —9820 por la diferencia de los dos menores errores, que es —13182, resulta +0,7 para la correccion; que, aegregada al 18, da 18,7.

Tomando 19 por *octavo número supuesto*, da 0 de error; por lo que infiero que 19 es raiz de la (ec. 10''), y tambien de las (ecs. 10' y 10).

306. Para encontrar las otras, divido el primer miembro de la (ec. 10'') por $x—19$; é igualando á cero el cociente, se tiene

$$x^3—36x^2—1440x+41472=0 \quad (10''').$$

Para aplicarle el método, supongo $x=1$; lo que

da +39997 dé error. Suponiendo $x=2$, da +38456 de error; y como este es menor, hallo la correccion al 2, multiplicando su error por 1; y dividiendo el producto +38456 por la diferencia de los dos menores errores, que es 1241, resulta 30 para la correccion; que, agregada al 2, da 32.

Tomando 32 por *tercer número supuesto*, da —8704 de error; que, siendo ya negativo, indica que entre 2 y 32 hay al ménos una raiz real; y como el error del 32 es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por $32-2=30$; y dividiendo el producto —261120, por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es +47160, resulta —5 para la correccion; que, agregada al 32, da 27.

Tomando 27 por *cuarto número supuesto*, da —3969 de error; que, siendo negativo, indica, que entre 2 y 27 hay al ménos una raiz real; y como el error del 27 es menor, hallo su correccion, multiplicando su error, por $27-2=25$; y dividiendo el producto —99225 por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es +42425, resulta —2 para la correccion; que, agregada al 27, da 25.

Tomando 25 por *quinto número supuesto*, da —1403 de error; que, siendo negativo, indica, que entre 2 y 25 hay al ménos una raiz real; y como el error del 25 es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por $25-2=23$; y dividiendo el producto —32269 por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es +39859, resulta —0,8 para la correccion; que, agregada al 25, da 24,2.

Tomando 24 por *séptimo número supuesto*, da 0 de error; por lo que inferimos, que 24 es raiz de la (ec. $10'''$); y tambien de las (ecs. $10''$, $10'$ y 10).

307. Para encontrar las demas, divido el primer miembro de la (ec. $10'''$) por $x-24$; é igualando á *cero* el cociente, se tiene

$x^3 - 12x - 1728 = 0$ (10^{IV}).

Para aplicarle el método, supongo $x=1$; lo que da -1715 de error. Suponiendo $x=2$, se tiene -1728 de error; y como este es mayor, hallo la correccion al 1, multiplicando su error por -1; y dividiendo el producto $+1715$ por la diferencia de los errores, que es -13, resulta -132 para la correccion; que, agregada al 1, da -131.

Tomando -131 por *tercer número supuesto*, da $+17005$ de error; que, siendo positivo, indica que entre 1 y -131 hay al ménos una raiz real; y como el error del -131 es mucho mayor que el del 1, hago como supuesto intermedio $x=-100$, lo que da 9472 de error; y como es menor el del 1, hallo su correccion, multiplicando su error por $1--100=101$; y dividiendo el producto -173215 por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es 11187, resulta -15 para la correccion; que, agregada al 1, da -14.

Tomando -14 por *quinto nùmero supuesto*, da -1364 de error; que, siendo negativo, indica que entre -14 y -100, hay al ménos una raiz real; y como el error del -14 es numéricamente menor, hallo su correccion, multiplicando su error por $-14--100=-14+100=+86$; y dividiendo el producto -117304 por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es 10836, resulta $-10,8$ para la correccion; que, agregada al -14, da $-24,8$.

Tomando -25 por *sesto número supuesto*, da -803 de error; que, siendo negativo, indica, que entre -25 y -100 hay al ménos una raiz real; y como el error del -25 es numéricamente menor, hallo la correccion al -25, multiplicando su error por $-25--100=+75$; y dividiendo el producto -60225 por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es $+10275$, resulta -6 para la correccion; que, agregada al -25, da -31.

Tomando -31 por *séptimo número supuesto*, da

-395 de error; que indica, que entre -31 y -100 hay al ménos una raiz real; y como el error del -31 es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por $-31--100=-31+100=+69$; y dividiendo el producto -27255 por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es 9867, resulta -3 para la correccion; que, agregada al -31, da -34.

Tomando -34 por *octavo número supuesto*, da -164 de error; por lo cual, entre -34 y -100 hay al ménos una raiz real; y como el error del -34 es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por $-34--100=+66$; y dividiendo el producto -10824 por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es 9636, resulta -1 para la correccion; que, agregada al -34, da -35.

Tomando -35 por *noveno número supuesto*, da -83 de error; por lo cual entre -35 y -100, hay al ménos una raiz real; y como el error del -35 es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por $-35--100=+65$; y dividiendo el producto -5395, por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es 9555, resulta $-0{,}57$ para la correccion; que, agregada al -35, da $-35{,}57$.

Tomando -36 por *décimo número supuesto*, da 0 de error; por lo que infiero que -36 es raiz de la (ec. $10^{\prime IV}$) y tambien de las (ecs. $10^{\prime\prime\prime}$, $10^{\prime\prime}$, $10^{\prime}$ y 10).

308. Para encontrar la otra, divido el primer miembro de la (ec. $10^{\prime IV}$) por $x+36$, é igualando el cociente á 0, se tiene $x-48=0$; que da $x=48$.

Luego las seis raices de la (ec. 10) son

$x=-1$; $x=-3$; $x=19$; $x=24$; $x=-36$ y $x=48$.

El error que nos dió el supuesto $x=-100$, era 9472; y el del $x=1$, con el cual lo hemos combinado para encontrar la correccion, era -1715; donde se ve que aquel es mas de cuatro veces mayor que este; por lo que no hubiera estado demas el haber hecho otro supuesto intermedio, como por ejemplo $x=-50$;

y hubiéramos hallado el resultado mas brevemente y con ménos molestia, como se convencerá el que guste hacerlo.

Vamos á proponer ahora para que los principiantes se ejerciten, la siguiente ecuacion, que tambien es del 6.º grado

$$x^6-33x^5+427x^4-2913x^3+11424x^2-16408x.....$$
$$+18816=0.$$

Y si hallan que sus raices son $x=3$; $x=4$; $x=4$; $x=7$; $x=7$ y $x=8$ es señal infalible de que ya han entendido el método.

En esta ecuacion se verifica lo que hemos asegurado (§. 276... 8.º); pues sustituyendo en ella por x los valores 1 y 10, resultan los errores +1131.2 y +5136, que son ambos de un mismo signo; y sin embargo entre los dos supuestos 1 y 10 hay nada ménos que seis raices reales.

309. Para ecuacion del grado 7.º, elegiré la siguiente $x^7-5x^6+3x^3-15x^2+5x-25=0$ (11).

Para aplicarle el método, supongo $x=1$; lo que da −36 de error. Suponiendo $x=2$, da −243 de error; y como este es mayor, hallo la correccion al 1, multiplicando su error por −1; y dividiendo el producto +36 por la diferencia de los dos errores, que es −207, resulta −0,1 para la correccion; que, agregada al 1, da 0,9.

Tomando 0,9 por *tercer número supuesto*, da −32,63 &c. de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al 0,9, multiplicando su error por 0,9−1=−0,1; y dividiendo el producto +3,26 &c., por la diferencia de los dos menores errores, que es −3,36 &c., resulta −0,97 para la correccion; que, agregada al 0,9, da −0,07.

Tomando −0,07 por *cuarto número supuesto*, da −25,24 &c. de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al −0,07, multiplicando su error por −0,07−0,9=−0,97; y dividiendo el producto 23,66 &c. por la diferencia de los dos menores erro-

res, que es —7,21 &c., resulta —3 para la correccion; que, agregada al —0,07, da —3,07.

Tomando —3,1 por *quinto número supuesto*, da —7462,8 &c, de error; que, siendo numéricamente mayor que todos, indica que nos hallamos en el caso del número 10.° de la regla. Para continuar el método, supongo $x=10$, lo que da +5001525 de error; que, siendo ya positivo, indica que entre 2 y 10 hay al ménos una raiz real; y como el error del 10 es mucho mayor que el del 2, hago eomo supuesto intermedio $x=6$; lo que da +46769 de error; que, siendo positivo, indica, que entre 2 y 6 hay al ménos una raiz de la ecuacion; pero como el error del 6 es todavía mucho mayor que el del 2, hago otro supuesto intermedio por ejemplo $x=4$; lo que da —4142 de error; que, como es ya negativo, indica que entre 4 y 6 hay al ménos una raiz real de la ecuacion; y como el error del 4 es menor, hallo la correccion que se debe hacer al 4, multiplicando su error por 4—6=—2; y dividiendo el producto +8284 por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es +50911, resulta 0,16 para la correccion; que, agregada al 4, da 4,16.

Tomando 4,2 por *noveno número supuesto*, da —2437,56 &c. de error; que siendo negativo, indica, que entre 4,2 y 6 hay al ménos una raiz real; y como el error del 4,2 es numéricamente menor que el del 6, hallo la correccion al 4,2, multiplicando su error por 4,2—6=—1,8; y dividiendo el producto +4387,61 &c. por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es +49206,56&c, resulta 0,08 para la correccion; que, agregada al 4,2 da 4,28.

Tomando 4,3 por *décimo número supuesto*, da —7817,84 &c. de error; que, siendo negativo, indica, que entre 4,3 y 6 hay al ménos una raiz real de la ecuacion; y como el error del 4,3 es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por 4,3—6=—1,7; y dividiendo el producto +13290,3 &c. por la dife-

rencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es $+54586,8$ &c., resulta $0,2$ para la correccion; que, agregada al $4,3$, da $4,5$.

Tomando 5 por *undécimo número supuesto*, resulta o de error; por lo que inferimos que 5 es raiz de la (ec. 11).

310. Para encontrar las demas, divido el primer miembro de la (ec. 11) por $x-5$; é igualando á 0 el cociente, se obtiene $x^6+3x^2+5=0$ (11′).

Y como todos sus esponentes son pares, y positivos todos sus términos, en virtud de lo espuesto (276... 5.º), resulta que no puede tener ninguna raiz real; y por lo mismo todas sus raices son imaginarias. Luego la (ec. 11) tiene una raiz igual con 5 y seis imaginarias.

311. Para ecuacion del grado 8.º eligiré la que sigue. $x^8-47x^6-98x^4+3x^2-147=0$ (12).

Aquí observamos desde luego, que, siendo pares todos los esponentes, cada una de las raices positivas (276... 4.º) tendrá otra igual y negativa.

Para aplicarle el método, supongo $x=1$; lo que da -288 de error. Suponiendo $x=2$, se tiene -4455 de error; que, siendo este mayor, hallo la correccion al 1, multiplicando su error por -1; y dividiendo el producto $+288$ por la diferencia de los errores, que es -4167, resulta $-0,07$ para la correccion; que, agregada al 1, da $+0,93$.

Tomando $0,9$ por *tercer número supuesto*, de $-211,54485979$ de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al $0,9$, multiplicando su error por $0,9-1=-0,1$; y dividiendo el producto $+21,15$&c. por la diferencia de los dos menores errores, que es $-56,45$ &c., resulta que $-0,3$ para la correccion; que, agregada al $0,9$, da $0,6$.

Tomando $0,6$ por *cuarto número supuesto*, da $-180,43$ &c. de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al $0,6$, multiplicando su error por $0,6-0,9=-0,3$; y dividiendo el producto $54,12$ &c. por la diferencia de los dos menores erro-

res, que es —31,112, resulta —1,7 para la correccion; que, agregada al 0,6, da —1,1.

Tomando —1,1 por *quinto número supuesto*, da —367,97 &c. de error; el cual, siendo numéricamente mayor que los dos que nos han servido para encontrarle, nos dice que nos hallamos en el caso del número 10.° de la regla; por lo cual, para continuar el método, supongo $x=10$; lo que da $+43200143$ de error; que, siendo ya positivo, indica que entre 2 y 10, hay al ménos una raiz real; y como el error del 10, dista mucho del del 2, hago como supuesto intermedio $x=8$; lo que da $+3945075$ de error; que, siendo positivo, indica, que entre 2 y 8 hay al ménos una raiz real; y como el error del 8 dista todavía mucho del del 2, hago como supuesto intermedio $x=6$; lo que da -640063 de error; que, siendo negativo, indica que entre 6 y 8 hay al ménos una raiz real; y como el error del 6 es numéricamente menor, hallo su correccion, multiplicando se error por $6-8=-2$; y dividiendo el producto $+1280126$ por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es $+4585138$, resulta $+0,3$ para la correccion; que, agregada al 6, da 6,3.

Tomando 6,3 por *octavo número supuesto*, da —611453,54 &c. de error; que, siendo negativo, indica que entre 6,3 y 8 hay al ménos una raiz real; y como el error del 6,3 es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por $6,3-8=-1,7$; y dividiendo el producto $+1039471,03$ &c., por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es $+4556528,54$ &c., resulta 0,2 para la correccion; que, agregada al 6,3, da 6,5.

Tomando 7 por *noveno número supuesto*, da 0 de error; por lo que infiero, que 7 es raiz de la (ec. 12).

312. Para encontrar las demas, divido el primer miembro de dicha (ec. 12) por $x-7$; é igualando á *cero* el cociente, se tiene,

$$x^7 - 7x^6 + 2x^5 + 14x^4 + 3x + 21 = 0 \quad (12')$$

Esta ecuacion, en virtud de lo que hemos indicado al principio, tendrá otra raiz del mismo valor numérico, pero negativa; es decir, que una de las raices será -7; mas sin hacer uso de este conocimiento, le aplicarémos el método, suponiendo $x=1$, lo que da $+49$ de error; el supuesto $x=2$, da $+897$ de error; y como este es el mayor, hallo la correccion al 1, multiplicando su error por -1; y dividiendo el producto -49 por la diferencia de los errores, que es $+848$, resulta $-0,06$, para la correccion; que, agregada al 1, da $0,94$

Tomando 0,9 por *tercer número supuesto*, da $+38,26$ &c. de error; que, siendo menor que todos, hallo su correccion, multiplicando su error por $0,9-1=-0,1$; y dividiendo el producto $-3,82$ &c. por la diferencia de los dos menores errores, que es $+10,73$ &c., resulta $-0,3$ para la correccion; que, agregada al 0,9, da 0,6.

Tomando 0,6 por *cuarto número supuesto*, da $+25,12$ &c. de error, y como es menor que todos, hallo su correccion, multiplicando su error por $0,6-0,9=-0,3$; y dividiendo el producto $-7,53$ &c. por la diferencia de los dos menores errores, que es $+13,14$ &c., resulta $-0,5$ para la correccion; que, agregada al 0,6, da $+0,1$.

Tomando 0,1 por *quinto número supuesto*, da $+21,3$ &c. de error; y como es menor que todos, hallo su correccion, multiplicando su error por $0,1-0,6=-0,5$; y dividiendo el producto $-10,65$ &c. por la diferencia de los dos menores errores, que es $+3,82$ &c., resulta -3 para la correccion; que, agregada al 0,1, da $-2,9$.

Tomando -3 por *sesto número supuesto*, da $+3576$ de error; que, siendo positivo y mayor que todos, indica que nos hallamos en el caso del número 10.° de la regla. Por lo que, procederémos á suponer $x=10$; lo que da 1734005 1 de error. Suponiendo $x=100$, da 107021400000321 de error; y como de suponer $x=1000$, $x=10000$ &c., iríamos obteniendo valores

mayores y positivos, resulta que para valores positivos de x no se debe esperar cambio de signo; por lo que, harémos $x=-1$; lo que da $+36$ de error. Suponiendo $x=-10$, se obtiene -9360000 de error; que, siendo ya negativo, y habiéndonos resultado positivo el correspondiente á $x=-3$, debemos inferir, que entre -3, y -10 hay al ménos una raiz real; y como el error del -10 es mucho mayor que el del -3, hago como supuesto intermedio $x=-8$; lo que da -269939 de error; que, siendo negativo, indica, que entre -3 y -8 hay al ménos una raiz real; y como el error del -8 dista mucho del del -3, hago como supuesto intermedio $x=-6$; lo que da $+49251$ de error; que, siendo positivo, indica que entre -6 y -8 hay al ménos una raiz real; y como el error del -6 es numéricamente menor, hallo la correccion al -6, multiplicando su error por
$-6--8=-6+8=+2$; y dividiendo el producto $+98502$ por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es -319190, resulta $-0,3$ para la correccion; que, agregada al -6, da $-6,3$.

Tomando $-6,3$ por *tercer número supuesto*, respecto de esta combinacion, se tiene $+47103,82$ &c. de error; que, siendo positivo, indica, que entre $-6,3$ y -8 hay al ménos una raiz real; y como el error del $-6,3$ es numéricamente menor, hallo su correccion, multiplicando su error por
$-6,3--8=-6,3+8=+1,7$; y dividiendo el producto $+80076,5$ &c. por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es $-317042,82$ &c., resulta $-0,25$ para la correccion; que, agregada al $-6,3$, da $-6,55$.

Tomando -7 por *cuarto número supuesto*, respecto de esta combinacion, resulta 0 de error; por lo que infiero que -7 es raiz de la (ec. 12′), y tambien de la (ec. 12).

313. Para encontrar las demas, divido el primer miembro de la (ec. 12′) por $x-7$; é igualando á cero el cociente, se tiene $x^6+2x^4+3=0$ (12″).

Y como esta ecuacion tiene positivos todos los términos, y los esponentes de la incógnita son números pares, resulta (276...5.º) que todas las raices son imaginarias; luego la (ec. 12) solo tiene dos raices reales, una $x=+7$ y otra $x=-7$, siendo imaginarias las otras seis.

314 *P.* ¿Qué ecuacion me propondréis resolver del grado noveno?

R. Para ecuacion del grado noveno, resolveré una de que ya se ha tratado en el Apéndice, que va al fin del segundo tomo del Compendio de Matemáticas; y que, habiéndose padecido allí una equivocacion, conviene ahora rectificarla; pues esto nos va á proporcionar todavía una ocasion mas de admirar la escelencia del método. En efecto, tanto en las cuestiones resueltas en dicho *Compendio*, como en lo espuesto en este complemento, se han visto ejemplos de que, cuando se comete un yerro, se halla el resultado unas veces sin producir mayor complicacion; otras aumentándola algun tanto, y aun en otras disminuyéndole algo; pero el yerro cometido en el párrafo 632 del tomo 2.º del citado *Compendio*, condujo á los verdaderos resultados con una facilidad muy estraordinaria. Ahora vamos á hacer ver en qué consistió allí el yerro, que entónces se cometió; y despues á resolver dicha ecuacion, enmendando el espresado yerro.

La ecuacion, que se trataba de resolver, era la que está en la página 491 del 2.º tomo del mencionado *Compendio*, que allí señalamos con el número 24′, y aquí le corresponde el número 13, y es la siguiente

$$x^9-8x^8+6x^7-48x^6-6848x^5+54784x^4-22326x^3....$$
$$+178608x^2+11635567x-93084536=0 \quad (13);$$

y en el paraje citado, se puso lo siguiente. «Para aplicarle el método, supongo $x=1$; lo que da -8124800 de error; $x=2$, da -68622002 de error; hallo la correccion al 2, multiplicando su error por 1; y dividiendo el producto -68622002 por la diferencia de los dos errores, que (I.. 112) es -12622798, re-

sulta 5,4 para la correccion; que, agregada al 2, dá 7,4.

» Tomando 7,4 por *tercer número supuesto*, da 238967,5 &c. de error; hallo la correccion al 7,4, multiplicando su error por 7,4—2=5,4; y dividiendo el producto 1290424 9,6 &c. por la diferencia de los dos menores errores, que es 68383034,4 &c., resulta 0,19 para la correccion; que, agregada al 7,4, da 7,59".

El yerro, cometido allí consiste en que siendo —68622002 el error, que produce el supuesto 2, y 238967,5 &c., el error del supuesto 7,4, la diferencia de estos errores es

—68622002—238967,5=—68860969,5, &c. y no 68383034,4 &c. como se puso en el testo. Para continuar ahora, enmendando este yerro, deberé dividir el producto 12904249,6 &c, por —68860969,5 &c.; y practicando la division, resulta —0,18 para la correccion; que, agregada al número supuesto 7,4, da 7,4—0,18=7,22.

Tomando este valor 7,22 por *cuarto número supuesto*, da —78456,6 &c, de error; que siendo negativo, y habiendo resultado positivo el de 7,4, es indicio de que entre 7,22 y 7,4 hay al ménos una raiz real; y como el error del 7,22 es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por 7,22—7,4=—0,18; y dividiendo el producto +14122,01 &c., por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es +317423,2 &c., resulta 0,04 para la correccion; que, agregada al 7,22, da 7,26.

Tomando 7,26 por *quinto número supuesto*, da —38382,9 &c. de error; que, siendo negativo, indica, qne entre 7,26 y 7,4 hay al ménos una raiz real; y como el error del 7,26 es el menor, hallo su correccion, multiplicando su error por 7,26—7,4=—0,14; y dividiendo el producto +5373,6 &c. por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es +266350,5 &c., resulta 0,02 para la correccion; que, agregada al 7,26, da 7,28.

Tomando 7,28 por *sesto número supuesto*, da

$-697,76$ &c. de error; que, siendo menor que todos, hallo su correccion, multiplicando su error por $7,28-7,26=0,02$; y dividiendo el producto $-17,95$ &c, por la diferencia de los dos menores errores, que es $-29285,4$ &c., resulta $0,0006$ para la correccion; que, agregada al $7,28$, da $7,2806$; que tomarémos por raiz aproximada el $7,28$.

315 Para encontrar las otras, divido el primer miembro de la (ec. 13) por $x-7,28$; é igualando á *cero* el cociente, se tiene, suprimiendo para mayor sencillez dos guarismos que resultan al fin, la

$$x^8-0,72x^7+0,7584x^6-42,478848x^5\ldots$$
$$-7157,24601344x^4+2679,249022 1568x^3\ldots.$$
$$-2821,0671186984 96x^2\ldots.$$
$$+158070,6313758749 4912x\ldots.$$
$$+12786321,1964163696 2959=0\ (13').$$

Para aplicarle el método, supongo $x=1$; lo que da $+12937051,3$ &c. de error; $x=2$, da $12996949,9$ &c. de error; y como este es mayor, hallo la correccion al 1, multiplicando su error por -1; y dividiendo el producto $-12937051,3$ &c. por la diferencia de los dos errores, que es $59898,6$ &c.. resulta -215 para la correccion; que, agregada al 1, da -214.

Tomando -214 por *tercer número supuesto*, da $+4413422825201796638,4$ &c. de error; que, siendo positivo y mayor que todos, indica que nos hallamos en el caso del número 10.° de la regla; por lo que harémos $x=10$; lo que da $+34502225,8$ &c. de error; $x=100$, da $+99283362195392 71,06$ &c. de error; $x=1000$, da $999928070864395557124728,6$ &c. de error; y como de suponer $x=10000$, $x=100000$ &c., iríamos sacando valores mayores y positivos, resulta que para valores positivos de x no hay que esperar cambio de signo.

Pasando á los supuestos negativos, resulta que $x=-1$, da $+12615637,9$ &c. de error; $x=-10$, da $+49867963,8$ &c. de error; $x=-100$,

da $+10073180406427104,5$ &c. de error; $x=-1000$, da $+10007207937161015251 34834,5$ &c. de error; y como suponiendo $x=-10000$, $x=-100000$ &c. iríamos obteniendo valores positivos y mayores, inferimos que tampoco hay cambio de signo por los valores negativos de x.

316 Luego tenemos precision de recurrir á encontrar la *ecuacion derivada* de la (ec. 13'); y hallándola segun se ha dicho (277... 10.°), se tiene

$$8x^7-5,04x^6+4,5504x^5-212,39424x^4\ldots$$
$$-28628,984053 76x^3+8037,747066 4704x^2\ldots$$
$$-5642,134237396992x\ldots$$
$$+158070,631375874949 12=0\ (13')'.$$

Para aplicarle el método, supongo $x=1$; lo que da $+131632,3$ &c. de error; $x=2$, da $-52645,7$ &c. de error; que, siendo negativo, indica que entre 1 y 2 hay al ménos una raiz real; y como el error del 2 es menor, hallo su correccion, multipicando su error por 1; y dividiendo el producto $-52645,7$ &c. por la diferencia de los errores, que es $+78986,6$ &c., resulta $-0,6$ para la correccion; que, agregada al 2, da 1,4.

Tomando 1,4 por *tercer número supuesto*, da $+87650,5$ &c. de error; que, siendo positivo, indica que entre 1,4 y 2 hay al ménos una raiz real; y como el error del 2 es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por $2-1,4=0,6$; y dividiendo el producto $-31587,4$ &c. por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es $+140296,2$ &c., resulta $-0,2$ para la correccion; que, agregada al 2, da 1,8.

Tomando 1,8 por *cuarto número supuesto*, da $+3167,5$ &c. de error; que, siendo positivo, indica que entre 1,8 y 2 hay al ménos una raiz real; y como el error del 1,8 es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por $1,8-2=-0,2$; y dividiendo el producto $-633,5$ &c. por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es

—56013,2 &c., resulta 0,01 para la correccion; que, agregada al 1,8, da 1,81.

Tomando 1,81 por *quinto número supuesto*, da +2549,1 &c. de error; que, siendo positivo, indica que entre 1,81 y 2 hay al ménos una raiz real; y como el error del 1,81 es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por 1,81—2=—0,19; y dividiendo el producto —482,1 &c. por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es —55194,9 &c., resulta 0,0087 para la correccion; que, agregada al 1,81, da 1,8187.

Tomando 1,82 por *sesto número supuesto*, da —61,5 &c. de error; que, siendo negativo, indica que entre 1,82 y 1,81 hay al ménos una raiz real; y como el error del 1,82 es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por 1,82—1,81=0,01; y dividiendo el producto —0,61599 &c. por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es +2610,73 &c., resulta —0,0002 para la correccion; que, agregada al 1,82, da 1,8198; que tomo por raiz de la (ec. 13′)′ respecto á resultar ya la correccion, en el cuarto lugar y ser tan pequeña.

317 Para ver si sustituido este valor en la (ec. 13′), nos da un valor negativo, que nos aisle ó acorrale alguna de sus raices ó un número impar de ellas, sustituirémos en su primer miembro este valor 1,8198; y como haciendo la sustitucion, y practicando las operaciones convenientes, dicho primer miembro se nos convierte en +4,325678967; que es un valor positivo, como todos los demas que ha suministrado dicha (ec. 13′), resulta que entre el valor 1,8198, y todos los valores que se han supuesto en dicha (ec. 13′), no hay comprendidas un número impar de raices reales, por lo que estarán comprendidas ó agrupadas en número par entre todos estos supuestos; y así deberémos proceder á encontrar otras raices de la ecuacion derivada, que es la (ec. 13′)′.

Para esto, divido ante todas cosas por 8 la (ec. 13′)′; y se convierte como se vé á la vuelta en

$x^7 - 0{,}63x^6 + 0{,}5688x^5 - 26{,}54928x^4 - 3578{,}6230672x^3 \ldots$
$+ 1004{,}71838330 88x^2 - 705{,}2667716\text{-}4624x \ldots$
$+ 19758{,}8289219843 6864 = 0 \;(13')''.$

Dividiendo ahora esto por $x - 1{,}8198$; é igualando á 0 el cociente, se tiene

$x^6 + 1{,}1898x^5 + 2{,}7339804x^4 - 21{,}573950366808x^3 \ldots$
$- 3617{,}88328165792x^2 - 5579{,}1056126560 68x \ldots$
$- 10858{,}12317358601 28 = 0 \;(15')'''$,

sin que nos resulte mas diferencia ó resta en el último término, que 0,7.

Para aplicarle el método, supongo $x = 1$; lo que da $-19061{,}7$ &c. de error; suponiendo $x = 2$, resulta $-36524{,}4$ &c. de error; y como este es numéricamente mayor, hallo la correccion al 1, multiplicando su error por -1; y dividiendo el producto $+19061{,}7$ &c. por la diferencia de los errores, que es $-17462{,}7$ &c., resulta $-1{,}09$ para la correccion; que, agregada al 1, da $-0{,}09$.

Tomando $-0{,}1$ por *tercer número supuesto*, resulta $-10036{,}6$ &c. de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al $-0{,}1$, multiplicando su error por $-0{,}1 - 1 = -1{,}1$; y dividiendo el producto $+11040{,}2$ &c. por la diferencia de los dos menores errores, que es $-9025{,}04$ &c., resulta $-1{,}2$ para la correccion; que, agregada al $-0{,}1$, da $-1{,}3$.

Tomando $-1{,}3$ por *cuarto número supuesto*, da $-9663{,}8$ &c. de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al $-1{,}3$, multiplicando su error por $-1{,}3 - -0{,}1 = -1{,}2$; y dividiendo el producto $+11596{,}6$ &c. por la diferencia de los dos menores errores, que es $-372{,}7$ &c., resulta -31 para la correccion; que, agregada al $-1{,}3$, da $-32{,}3$.

Tomando $-32{,}3$ por *quinto número supuesto*, da $+1156726614{,}4$ &c. de error; que, siendo positivo, indica que entre $-1{,}3$ y $-32{,}3$ hay al ménos una raiz real; y como el error del $-1{,}3$ dista muchísimo del del $-32{,}3$, hago un supuesto intermedio,

cual es, $x=-10$; lo que da $+613078,5$ &c. de error; que, siendo positivo, indica que entre $-1,3$ y -10 hay al ménos una raiz real; y como el error del -10 es considerablemente mayor que el del $-1,3$, hago como supuesto intermedio $x=-7$; lo que da $-47474,5$ &c. de error; que, siendo negativo, indica que entre -7 y -10 hay al ménos una raiz real; y como el error del -7 es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por $-7--10=+3$; y dividiendo el producto $-142423,6$ &c. por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es, $+660553,07$ &c., resulta $-0,2$ para la correccion; que, agregada al -7, da $-7,2$.

Tomando $-7,2$ por *séptimo número supuesto*, da $-33337,2$ &c. de error; que, siendo negativo, indica, que entre $-7,2$ y -10 hay al ménos una raiz real; y como el error del $-7,2$ es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por $-7,2-(-10)=-7,2+10=+2,8$; y dividiendo el producto $-93344,3$ &c. por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es $646415,3$ &c., resulta $-0,1$ para la correccion; que, agregada al $-7,2$, da $-7,3$.

Tomando $-7,3$ por *octavo número supuesto*, da $-103,7$ &c. de error; que, siendo negativo, indica, que entre $-7,3$ y -10, hay al ménos una raiz real; y como el error del $-7,3$ es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por $-7,3--10=-7,3+10=+2,7$; y dividiendo el producto $-303,3$ &c. por la diferencia de los dos errores más próximos de signos contrarios, que es $+663182,2$ &c., resulta $-0,0005$ para la correccion; que, agregada al $-7,3$, da $-7,3005$.

318. Habiendo resultado una correccion tan pequeña; y siendo ya el error tan de corta consideracion, tomarémos este valor por raiz de la (ec. 13′)‴; y sustituyéndole en la (ec. 13′), deberá salir un error de signo contrario al que dieron los supuestos $x=-1$ y $x=-10$. En efecto, sustituyendo por x, no el va-

lor completo —7,3005, sinó el —7,3, que nos es suficiente, resulta —222636,9 &c. de error; que, siendo negativo, y habiéndonos resultado positivos los errores de los supuestos $x=-1$ y $x=-10$, indica que la ecuacion propuesta tiene al ménos una raiz real entre —1 y —7,3; y lo ménos otra raiz tambien real entre —7,3 y —10; lo que en efecto va conforme: pues al formar dicha ecuacion (§ 630) del 2.° tomo del *Compendio de Matemáticas*, se vió que una de las raices es —7,28 y otra —7,81.

319. Para encontrar la raiz comprendida entre —1 y —7,3, observaré que, como el —7,3 da menor error numérico que el —1, para encontrar la correccion, multiplico su error por
—7,3 — —1 = —6,3; y dividiendo el producto +1402603,07 &c. por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es +12838274,9 &c., resulta +0,1 para la correccion; que, agregada al —7,3, da —7,2.

Tomando —7,2 por *tercer número supuesto*, respecto de esta combinacion, da +297251,1 &c. de error; que siendo positivo, indica, que entre —7,2 y —7,3 hay al ménos una raiz real; y como el error del —7,3 es el menor, hallo su correccion, multiplicando su error por
—7,3 — (—7,2) = —7,3 + 7,2 = —0,1; y dividiendo el producto +22263,6 &c. por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es +519888,1 &c., resulta 0,04 para la correccion; que, agregada al —7,3, da —7,26.

Tomando —7,26 por *cuarto número supuesto*, da +116532,8 &c. de error; que, siendo positivo, indica, que entre —7,26 y —7,3, hay al ménos una raiz real; y como el error del —7,26 es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por
—7,26 — —7,3 = —7,26 + 7,3 = 0,04; y dividiendo el producto +4661,3 &c. por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es —239169,8 &c., resulta —0,019 para la cor-

reccion; que, agregada al $-7,26$, da $-7,279$.

Tomando $-7,28$ por *quinto número supuesto*, da $+5529,1$ &c. de error; que, siendo positivo, indica que entre $-7,28$ y $-7,3$ hay al ménos una raiz real; y como el error del $-7,28$ es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por $-7,28 - -7,3 = +0,02$; y dividiendo el producto $+110,58$ &c. por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es $-228166,1$ &c., resulta $-0,0004$ para la correccion; que, agregada al $-7,28$, da $-7,2804$; que pues ya la correccion viene en el cuarto lugar, tomarémos por raiz suficientemente aproximada.

320. Ahora debemos combinar los supuestos $x = -7,3$ y $x = -10$ para encontrar la raiz

$$x = -7,81.$$

El supuesto $x = -7,3$ dió $-222636,9$ &c. de error; el supuesto $x = -10$, da $+4986963,8$ &c. de error; y como este tiene dos guarismos mas que el del $-7,3$, y ademas son mucho mayores dichos guarismos, harémos como supuesto intermedio $x = -8$; lo que da $+539236,8$ &c. de error; que, siendo positivo, indica que entre $-7,3$ y -8 hay al ménos una raiz real; y como el error del $-7,3$, es numéricamente menor, hallo la correccion al $-7,3$, multiplicando su error por $-7,3 - (-8) = 0,7$; y dividiendo el producto $-155847,8$ &c. por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es $+761873,8$ &c., resulta $-0,2$ para la correccion; que, agregada al $-7,3$, da $-7,5$.

Tomando $-7,5$ por *cuarto número supuesto*, respecto de esta combinacion, da $-618870,2$ &c. de error; que, siendo negativo, indica que entre $-7,5$ y -8 hay al ménos una raiz real; y como el error del -8 es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por $-8 - -7,5 = -0,5$; y dividiendo el producto $-377464,7$ &c. por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios,

que es —1158107,1 &c., resulta —0,3 para la correccion; que, agregada al —8, da $-8+0,3=-7,7$.

Tomando —7,7 por *quinto número supuesto*, respecto de esta combinacion, da +19018 7,9 &c. de error; que, siendo negativo, indica que entre —7,7 y —8 hay al ménos una raiz real; y como el error del —7,7 es menor; hallo su correccion, multiplicando su error por $-7,7--8=+0,3$; y dividiendo el producto —57056,3 &c. por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es +729424,7 &c., resulta —0,08 para la correccion; que, agregada al —7,7, da —7,78.

Tomando —7,8 por *sesto número supuesto*, da —16939,06 &c. de error; que, siendo negativo, indica que entre —7,8 y —8 hay al ménos una raiz real; y como el error del —7,8 es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por $-7,8--8=+0,2$; y dividiendo el producto —3387,8 &c. por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es +556175,8 &c., resulta —0,006 para la correccion; que, agregada al —7,8, da —7,806.

Tomando —7,81 por *séptimo número supuesto*, da —799,651277 &c. de error; que, siendo negativo, indica que entre —7,81 y —8 hay al ménos una raiz real de la ecuacion; y como el error del —7,81 es numéricamente menor, hallo su correccion, multiplicando su error por $-7,81--8=+0,19$; y dividiendo el producto —151,9 &c. por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es +540036,4 &c., resulta —0,0003 para la correccion; que, agregada al —7,81, da —7,8103, que tomarémos por raiz suficientemente aproximada de la (ec. 13′), y tambien lo será de la (ec. 13).

321. Para encontrar las demas raices de ella, deberémos dividir su primer miembro, primero por $x+7,2804$, que es el factor correspondiente á la raiz $x=-7,2804$, y el cociente que nos resulte, lo deberémos dividir por $x+7,8103$, que es el factor correspondiente á la raiz $x=-7,8103$.

322. Dividiendo el primer miembro de la (ec. 13′) por $x+7{,}28$, resulta por cociente

$$x^7-8x^6+58{,}9984x^5-471{,}9872x^4-3721{,}1791974 4x^3\ldots$$
$$+29769{,}4335795 2x^2-219542{,}5435776040 96x\ldots$$
$$+1755350{,}3490208327 68=0.$$

Y dividiendo el primer miembro de esta ecuacion, por $x+7{,}8103$, se tiene por cociente

$$x^6-15{,}8103x^5+182{,}4815860 9x^4\ldots$$
$$-1897{,}2231318387 27x^3+11096{,}7026291 6x^2\ldots$$
$$-56899{,}1429650082x+224856{,}8327219983 71=0 \; (13'').$$

323. Para continuar hallando las raices de la (ec. 13″), supongo $x=1$; lo que da $+178324{,}7$ &c. de error. Suponiendo $x=2$, da $+142725{,}3$ &c. de error; que, siendo menor que el del 1, hallo la correccion al 2, multiplicando su error por 1; y dividiendo el producto $+142725{,}3$ &c. por la diferencia de los dos errores, que es $35599{,}3$ &c., resulta 4 para la correccion; que, agregada al 2, da 6.

Tomando 6 por *tercer número supuesto*, da $+33355{,}2$ &c. de error; que, siendo menor que todos, hallo su correccion, multiplicando su error por $6-2=4$; y dividiendo el producto $+133420{,}9$ &c. por la diferencia de los dos menores errores, que es $109370{,}1$ &c., resulta $1{,}2$ para la correccion; que, agregada al 6, da $7{,}2$.

Tomando $7{,}2$ por *cuarto número supuesto*, da $+6096{,}6$ &c. de error; y como es el menor de todos, hallo su correccion, multiplicando su error por $7{,}2-6=1{,}2$; y dividiendo el producto $7315{,}9$ &c. por la diferencia de los dos menores errores, que es $+27259{,}5$ &c., resulta $0{,}27$ para la correccion; que, agregada al $7{,}2$, da $7{,}47$.

Tomando $7{,}5$ por *quinto número supuesto*, da $+2287{,}0008$ &c. de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al $7{,}5$, multiplicando su error por $7{,}5-7{,}2=0{,}3$; y dividiendo el producto $+686{,}1$ &c. por la diferencia de los dos menores er-

rores, que es +3809,6 &c., resulta 0,2 para la correccion; que, agregada al 7,5, da 7,7.

Tomando 8 por *sesto número supuesto*, da +3,32 &c. de error; que, siendo menor que todos, hallo su correccion, multiplicando su error por 8—7,7=0,3; y dividiendo el producto 0,996 &c. por la diferencia de los dos menores errores, que es 2273,6 &c., resulta 0,0003 para la correccion; que, agregada al 8, da 8,0003, que tomarémos por raiz exacta el 8; pues el error 3,32 resulta de las aproximaciones de las raices anteriores; y para ver si el 8 en efecto es raiz de la (ec. 13), que es la primitiva, no tenemos mas que hacer la sustitucion de 8 por x, y resulta que el primer miembro es 0; luego el 8 es raiz de la mencionada (ec. 13).

324. Para encontrar las demas raices de la (ec. 13''), divido su primer miembro por $x—8$; é igualando á cero el cociente, se tiene

$$x^5-7,8103x^4+119,99918609x^3-937,22964311872 7x^2 \dots +3598,86548 42x-28109,2190914082=0 \ (13''');$$

siendo muy digno de notarse, que, á pesar de tantas aproximaciones, la resta de la division es solo 16,92.

Para aplicarle el método á esta ecuacion, supongo $x=1$; lo que da —25334,3 &c. de error. El supuesto $x=2$, da —23793,3 &c. de error; y siendo este menor, hallo la correccion al 2, multiplicando su error por 1; y dividiendo el producto —23793,3 &c. por la diferencia de los errores, que es —1541,01 &c., resulta 15 para la correccion; que, agregada al 2, da 17.

Tomando 17 por *tercer número supuesto*, da +1115301,06 &c. de error; que, siendo positivo, indica, que entre 2 y 17 hay al ménos una raiz real; y como el error del 17 es considerablemente mayor que el del 2, hago como supuesto intermedio $x=10$; lo que da +56050,6 &c. de error; que, siendo positivo, indica que entre 2 y 10 hay al ménos una raiz real; y como el error del 10 es mayor, hallo la cor-

reccion al 2, multiplicando su error por 2—10=—8, y dividiendo el producto +190347,02 &c. por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es +32257,2 &c., resulta 5,9 para la correccion; que, agregada al 2, da 7,9.

Tomando 8 por *cuarto número supuesto*, da +2915,6 &c. de error; que, siendo positivo, indica, que entre 2 y 8 hay al ménos una raiz real; y como el error del 8 es menor, hallo su correccion, multiplicando su error, por 8—2=6; y dividiendo el producto +17493,6 &c. por la diferencia de los errores mas próximos de signos contrarios, que es —28249,9 &c., resulta —0,6 para la correccion; que, agregada al 8, da 7,4.

Tomando 7,4 por *quinto número supuesto*, da —5203,008 &c. de error; que, siendo negativo, indica que entre 7,4 y 8 hay al ménos una raiz real; y como el error del 8 es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por 8—7,4=0,6; y dividiendo el producto +1749,3 &c. por la diferencia de los dos errores mas proximos de signos contrarios, que es —8118,6 &c. resulta —0,2 para la correccion; que, agregada al 8, da 7,8.

Tomando 7,8 por *sesto número supuesto*, da —151,9 &c. de error; que, siendo negativo, indica, que entre 7,8 y 8 hay al ménos una raiz real; y como el error del 7,8, es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por 7,8—8=—0,2; y dividiendo el producto +30,38 &c. por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es +3057,5 &c., resulta 0,009 para la correccion; que, agregada al 7,8, da 7,809.

Tomando 7,81 por *séptimo número supuesto*, da —3,497 &c. de error; que, siendo negativo, indica que entre 7,81 y 8 hay al ménos una raiz real; y como el error del 7,81 es numéricamente menor, hallo su correccion, multiplicando su error por 7,81—8=—0,19; y dividiendo el producto +0,694 &c. por la diferencia de los dos errores mas próximos de

signos contrarios, que es $+2919,09$ &c., resulta $0,0003$ para la correccion; que, agregada al $7,81$, da $7,8103$.

Como ya la correccion es tan pequeña, podrémos tomar este valor por raiz aproximada de la (ec. 13'''), y lo será tambien de las (ecs. 13'', 13' y 13).

325. Para encontrar las demas, divido el primer miembro de dicha ecuacion por $x-7,8103$; é igualando á cero el cociente, se tiene,

$$x^4+119,99918609x^2+3598,8654842=0;$$

que siendo pares todos los esponentes de la incógnita, y siendo positivos todos los términos, indica (276...5.°) que esta ecuacion solo tiene raices imaginarias; luego la (ec. 13) solo tiene las cinco raices reales siguientes, $x=7,28$; $x=-7,28$; $x=-7,81$; $x=8$ y $x=7,81$; que, unidas á la raiz $x=7$, que se halló en el (§. 631) del 2.° tomo del Compendio, resultan las seis raices reales que tiene la (ec. 24) del mencionado *Compendio*, segun se vió, tanto en el (§. 641) de dicho 2.° tomo, como al formar dicha (ec. 24) (§. 630) del mismo

326. Para ecuacion del grado 10.° elegiré una que presente aun mas complicacion que la (ec. 24) del 2.° tomo del Compendio de Matemáticas; y con el fin de dar un ejemplo de todo, enseñarémos á formar dicha ecuacion, aglomerando cuantas dificultades pueda ofrecer su grado. Para esto, observarémos que la mayor complicacion que resulta en las ecuaciones, proviene de estar muy próximas las raices, y de tener raices imaginarias.

Por esta causa, observaré, que si se formase el producto $(x-3)(x-4)$; la ecuacion que resultase, igulándole con cero, tendría dos raices positivas; á saber: $x=3$ y $x=4$, que se diferencian en solo una unidad.

Si dicho producto se multiplica por x^2-11, el producto indicado, sería $(x-3)(x-4)(x^2-11)$. Pero el factor $x^2=11$, igualado á 0, da $x^2-11=0$; que,

trasladando, se tiene $x^2=11$. Ahora debemos hacer una observacion; y es, que el x^2, es tanto el cuadrado de $+x$, como el de $-x$; pues (273), se tiene

$$+x\times+x=+x^2 \text{; y } -x\times-x=+x^2.$$

En el párrafo (234) de la Aritmética de Niños, hemos sacado que la raiz de 11 es 3,3166; y por la misma observacion, tendrémos que la raiz del 11, será tanto $+3,3166$ como $-3,3166$; luego la ecuacion $x^2-11=0$ nos da dos valores $x=+3,3166$ y $x=-3,3166$. De estos valores el positivo $+3,3166$ se halla entre el 3 y el 4.

Si introducimos ademas el factor x^2-13, el producto será $(x-3)(x-4)(x^2-11)(x^2-13)$; y como por la misma razon, que acabamos de dar respecto del x^2-11, y la raiz del 13 es (234) 3,6055, tendrémos que dicho factor introduce las dos raices $x=+3,6055$ y $x=-3,6055$; de las cuales, la positiva $+3,6055$, se halla tambien entre el 3 y el 4. Luego en lo que ya tenemos puesto hay cuatro raices reales y positivas en que la diferencia de la menor á la mayor es solo una unidad.

La introduccion de las raices imaginarias en las ecuaciones es tambien lo que mas complica su resolucion. Así es, que cuando todas las raices son reales, no hay necesidad por lo regular de recurrir á los medios que se proponen en el número 10.° de la regla. Y estas raices imaginarias complican tanto mas, cuanto el número que representan, si fuese real, se halle mas próximo á las raices reales. Por esta causa, si introducimos el factor x^2+11, el producto se nos convertirá en

$$(x-3)(x-4)(x^2-11)(x^2-13)(x^2+11).$$

Y como el factor x^2+11, igualado con 0, y trasladando da $x^2=-11$, si estraemos la raiz cuadrada del primer miembro, será $\pm x$; é indicando la del segundo miembro, es $\pm\sqrt{-11}$. Y como toda raiz par de una cantidad negativa, es imposible, porque no puede ser cuadrado ningun número negativo, la

espresion $\pm\sqrt{-11}$ es imaginaria. Pero toda imaginaria se puede transformar en la raiz de la unidad negativa, multiplicada por la raiz de la cantidad tomada positivamente, luego se tendrá que

$\pm\sqrt{-11}=\pm\sqrt{11}\times\sqrt{-1}$; y como la raiz de 11 acabamos de ver que es 3,3166, se tendrá, que el factor x^2+11 introduce en la ecuacion estas dos raices imaginarias $x=+3,3166\sqrt{-1}$, y $x=-3,3166\sqrt{-1}$.

Ahora, en la ecuacion parecida á esta, que hemos resuelto en el Compendio, habia otra raiz imaginaria entre los mismos números enteros, y en que el número que multiplicaba al $\sqrt{-1}$, se hallaba entre dichos números; y la mayor complicacion que ofrece este caso de que nos vamos á ocupar respecto de aquel, es que el número que multiplica á la parte imaginaria sea igual precisamente al otro número real, que se halla entre los dos números enteros, y esto procede de introducir el factor x^2+13, que igualado con o y trasladando y estrayendo la raiz cuadrada, da $x=\pm\sqrt{13}\times\sqrt{-1}=\pm3,6055\sqrt{-1}$, que da las dos raices $x=+3,6055\sqrt{-1}$ y $x=-3,6055\sqrt{-1}$. Luego si multiplicamos el producto indicado anterior, por x^2+13, tendrémos

$(x-3)\ (x-4)\ (x^2-11)\ (x^2-13)\ (x^2+11)\ (x^2+13)$.

327 Efectuando las operaciones, resulta

$x^{10}-7x^9+12x^8-290x^6+2030x^5-3480x^4+20449x^2\ldots$
$-143143x+245388=0$ (14).

Para aplicarle el método, supongamos $x=1$; lo que da $+121160$ de error; $x=2$ da -32090 de error; y como este es menor, hallo la correccion al 2, multiplicando su error por 1; y dividiendo el producto 32090 por la diferencia de los errores, que

es 89070, resulta 0,36 para la correccion; que, agregada al 2, da 2,36.

Tomando 2,4 por *tercer número supuesto*, da +11451,13 &c. de error; y como es menor que todos, hallo la correccion al 2,4, multiplicando su error por 2,4—2=0,4: y dividiendo el producto 4580,45 &c. por la diferencia de los dos menores errores, que es 20638,8 &c., resulta 0,22 para la correccion; que, agregada al 2,4, da 2,62.

Tomando 3 por *cuarto número supuesto*, da 0 de error; por lo que 3 es raiz de la (ec. 14).

328 Para encontrar las demas, divido el primer miembro de dicha ecuacion por $x-3$; é igualando à *cero* el cociente, se tiene

$x^9-4x^8-290x^5+1160x^4+20449x-81796=0$ (14′).

Para aplicarle el método, supongo $x=1$; lo que da —60480 de error; $x=2$ da —32130 de error; y como es menor que el del 1, hallo la correccion al 2, multiplicando su error por 1; y dividiendo el producto —32130 por la diferencia de los dos errores, que es —28350, resulta 1,1 para la correccion; que, agregada al 2, da 3,1.

Tomando 3,1 por *tercer número supuesto*, dá —1976,19 &c. de error; y como es menor que todos, hallo la correccion al 3,1, multiplicando su error por 3,1—2=1,1; y dividiendo el producto —2173,8 &c. por la diferencia de los dos menores errores, que es —30153,8 &c., resulta 0,07 para la correccion; que, agregada al 3,1, da 3,17.

Tomando 3,2 por *cuarto número supuesto*, da —1829,005 &c. de error; y como es menor que todos, hallo la correccion al 3,2, multiplicando su error por 3,2—3,1=0,1; y dividiendo el producto —182,9 &c. por la diferencia de los dos menores errores, que es —147,18 &c., resulta 1 para la correccion; que, agregada al 3,2, da 4,2.

Tomando 4 por *quinto número supuesto*, da 0 de error; por lo que inferimos que 4 es raiz de la (ec. 14′) y tambien lo será de la (ec. 14).

329. Para encontrar las demas, divido el primer miembro de la (ec. 14′) por $x-4$; é igualando á *cero* el cociente, resulta

$$x^8-290x^4+20449=0\ (14'').$$

Para aplicarle el método, supongo $x=1$; lo que da $+20160$ de error; el supuesto $x=2$, da $+16060$; y como este es menor, hallo la carreccion al 2, multiplicando su error por 1; y dividiendo el producto $+16060$ por la diferencia de los errores, que es $+4100$, resulta 3,9 para la correccion; que, agregada al 2, da 5,9.

Tomando 6 por *tercer número supuesto*, da $+1324225$ de error; que, siendo mayor que los anteriores, y teniendo el mismo signo que ellos, indica que nos hallamos en el caso del número 10.° de la regla; por lo que, supongo $x=10$; lo que da $+97120449$ de error; suponiendo $x=100$, da $+99997100020449$ de error; y como de suponer $x=1000$, $x=10000$ &c., iríamos hallando errores mayores y positivos, es indicio de que por valores positivos de x no lograrémos cambio de signo; y como suponiendo valores negativos á x sacarémos los mismos errores, por ser pares todos los esponentes de la ecuacion, resulta que tampoco deberémos esperar cambio de signo para valores negativos de x. Luego, para investigar las raices reales de la (ec. 14″) no hay mas arbitrio que formar su ecuacion derivada, que (277... 10.°) es

$$8x^7-1160x^3=0\ (14'')'.$$

330. Esta ecuacion tiene tres raices iguales con cero, pues todos sus términos son divisibles por x^3. Veamos ante todas cosas si el valor 0 satisface á la ecuacion 14″; y vemos que no; por lo que dividiendo la (ec. 14″)′ por x^3, se obtiene $8x^4-1160=0$; que dividiendo por 8 se convierte en

$$x^4-145=0\ (14'')''.$$

Para aplicar el método á esta ecuacion, supongo $x=1$; lo que da -144 de error; suponiendo $x=2$, da -129 de error; y como este es menor, hallo la correccion al 2, multiplicando su error por 1; y di-

vuendo el producto −129 por la diferencia de los errores, que es −15, resulta +8 para la correccion; que, agregada al 2, da 10.

Tomando 10 por *tercer número supuesto*, da +9855 de error; que, siendo ya positivo, indica que entre 2 y 10 hay al ménos una raiz real; y como el error del 10 es considerablemente mayor que el del 2, hago como supuesto intermedio $x=5$; lo que da +480 de error; que, siendo positivo, indica que entre 2 y 5 hay al ménos una raiz real; y como el error del 2 es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por 2−5=−3; y dividiendo el producto +387 por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es +609, resulta 0,6 para la correccion; que, agregada al 2, da 2,6.

Tomando 3 por *quinto número supuesto*, da −64 de error; que, siendo negativo, indica, que entre 3 y 5 hay al ménos una raiz real; y como el error del 3 es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por 3−5=−2; y dividiendo el producto +128 por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es +544, resulta 0,23 para la correccion; que, agregada al 3, da 3,23.

Tomando 3,23 por *sesto número supuesto*, da −36,15 &c. de error; que, siendo negativo, indica que entre 3,23 y 5 hay al ménos una raiz real; y como el error del 3,23 es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por 3,23−5=−1,77; y dividiendo el producto +63,99 &c. por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es +516,15 &c., resulta 0,12 para la correccion; que, agregada al 3,23, da 3,35.

Tomando 3,35 por *séptimo número supuesto*, da −19,05 &c. de error; que, siendo negativo, indica, que entre 3,35 y 5 hay al ménos una raiz real; y como el error del 3,35 es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por 3,35−5=−1,65; y dividiendo el producto +31,44 &c. por la diferencia

de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es 449,055 &c. resulta 0,07 para la correccion; que, agregada al 3,35, da 3,42; que por resultar ya la correccion tan pequeña, tomarémos por raiz aproximada de la (ec. 14″)″.

331. Sustituyendo este valor 3,42 en la (ec. 14″), se tiene −1678,49 &c. de error; que, siendo negativo, y habiendo resultado positivos los errores del 2 y del 6, inferimos que entre 2 y 3,42 hay al ménos una raiz real; y entre 3,42 y 6 hay tambien otra raiz real.

332. Propongámonos primero encontrar la raiz que se halla entre 2 y 3,42. Para lo cual, observarémos que el error del 3,42 es menor que el del 2; por lo que hallarémos la correccion al 3,42, multiplicando su error por 3,42−2=1,42; y dividiendo el producto −2383,46 &c. por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es +17738,49 &c., resulta −0,1 para la correccion; que, agregada al 3.42, da 3,32.

Tomando 3,32 por *tercer número supuesto*, da −13,95 &c. de error; que, siendo negativo, indica, que entre 2 y 3,32 hay al ménos una raiz real; y como el error del 3,32 es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por 3,32−2=1,32; y dividiendo el producto −39,41 &c, por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es +16083,39 &c., resulta −0,002 para la correccion; que, agregada al 3,32, da 3,318.

Tomando 3,318 por *cuarto número supuesto*, da −13,555 &c. de error; que, siendo negativo, indica, que entre 2 y 3,318 hay al ménos una raiz real; y como el error del 3,318 es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por 3,318−2=1,318; y dividiendo el producto −17,87 &c. por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es +16073,55 &c., resulta −0,001 para la correccion; que, agregada al 3,318, da 3,317.

Tomando 3,317 por *quinto número supuesto*, da

$-4,77$ &c. de error; que siendo negativo, indica, que entre 2 y 3,317 hay al ménos una raiz real; y como el error del 3,317 es numéricamente menor, hallo su correccion, multiplicando su error por $3,317-2=1,317$; y dividiendo el producto $-6,28$ &c. por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es $+16064,7$ &c., resulta $-0,0004$ para la correccion; que, agregada al 3,317, da 3,3166.

Tomando 3,3166 por *sesto número supuesto*, da $-0,7901899$ &c. de error; que, siendo negativo, indica, que entre 2 y 3,3166 hay al ménos una raiz real; y como el error del 3,3166 es numéricamente menor, hallo su correccion, multiplicando su error por $3,3166-2=1,3166$; y dividiendo el producto $-1,040364$ &c. por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es 16060,79 &c., resulta $-0,00006$ para la correccion; que, agregada al 3,3166, da 3,31654, que en virtud de ser ya tan pequeña la correccion, tomaré por raiz de la (ec. 14'').

333. Para encontrar la raiz que se halla entre 3,42 y 6, observo que como el error del 3,42 es muchísimo menor que el del 6, hago como supuesto intermedio $x=4$; lo que da $+11745$ de error; que, siendo positivo, indica, que entre 3,42 y 4 hay al ménos una raiz real; y como el error del 3,42 es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por $3,42-4=-0,58$; y dividiendo el producto $+973,5$ &c. por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es $+13423,49$ &c. resulta 0,07 para la correccion; que, agregada al 3,42, da 3,49.

Tomando 3,5 por *tercer número supuesto*, respecto de esta combinacion, se tiene $-1549,8$ &c. de error; que, siendo negativo, indica, que entre 3,5 y 4 hay al ménos una raiz real; y como el error del 3,5 es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por $3,5-4=-0,5$; y dividiendo el producto $+774,92$ &c. por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es $+12294,87$ &c.

resulta 0,06 para la correccion; que, agregada al 3,5, da 3,56.

Tomando 3,6 por *cuarto número supuesto*, da —53,147 &c. de error; que, siendo negativo, indica, que entre 3,6 y 4 hay al ménos una raiz real; y como el error del 3,6 es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por 3,6—4=—0,4; y dividiendo el producto +21,25 &c. por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es +17798,147 &c., resulta 0,002 para la correccion; que, agregada al 3,6, da 3,602.

Tomando 3,602 por *quinto número supuesto*, da —22,774 &c. de error; que, siendo negativo, indica, que entre 3,602 y 4 hay al ménos una raiz real; y como el error del 3,602 es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por 3,602—4=—0,398; y dividiendo el producto 7,242 &c. por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es +11767,774 &c., resulta 0,0006 para la correccion; que, agregada al 3,602, da 3,6026.

Tomando 3,603 por *sesto número supuesto*, da —22,7399 &c. de error; que, siendo negativo, indica, que entre 3,603 y 4 hay al ménos una raiz real; y como el error del 3,603 es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por 3,603—4=—0,397; y dividiendo el producto +9,027759 &c. por la diferéncia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es +11767,7399 &c., resulta 0,0008 para la correccion; que, agregada al 3,603, da 3,6038.

Tomando 3,604 por *séptimo número supuesto*, da —13,9186 &c. de error; que, siendo negativo, indica, que entre 3,604 y 4 hay al ménos una raiz real; y como el error del 3,604 es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por 3,604—4=—0,396; y dividiendo el producto +6,4117456 &c. por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es +11758,9186 &c., resulta 0,0005 para la correccion; que, agregada al 3,604, da 3,6045.

Tomando 3,605 por *octavo número supuesto*, da

—0,4956025 &c de error; que, siendo negativo, indica, que entre 3,605 y 4 hay al ménos una raiz real; y como el error del 3,605 es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por 3,605—4=—0,395; y dividiendo el producto +2,57576 &c. por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es 11751,5956025 &c., resulta 0,0002 para la correccion; que, agregada al 3,605, da 3,6052.

Tomando 3,6052 por *noveno número supuesto,* da —5,7467 &c. de error; que, siendo negativo, indica, que entre 3,6052 y 4 hay el ménos una raiz real; y como el error del 3,6052 es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por 3,6052—4=—0,3948; y dividiendo el producto +2,27929516 &c. por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es +11750,7467 &c., resulta +0,0002 para la correccion; que, agregada al 3,6052, da 3,6054.

Tomando 3,6054 por *décimo número supuesto,* da —4,356724 &c. de error; que, siendo negativo, indica, que entre 3,6054 y 4 hay al ménos una raiz real; y como el error del 3,6054 es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por 3,6054—4=—0,3946; y dividiendo el producto 1,71877331104 por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es 11749,356724 &c., resulta 0,0001 para la correccion; que, agregada al 3,6054, da 3,6055, que es en efecto la raiz que buscabamos.

334. Como la (ec. 14″) tiene todos sus esponentes de grado par, resulta (276...4.°) que si hay un valor positivo de x que satisfaga á dicha ecuacion, habrá precisamente otro negativo é igual numéricamente, que satisfaga á la misma ecuacion. Luego, pues hemos hallado (332) que $x=3,31654$ es raiz de la (ec. 14″), inferimos que tambien será raiz de la misma ecuacion el valor $x=-3,31654$; luego el primer miembro de la (ec. 14″) será divisible por

$x-3{,}31654$ y por $x+3{,}61654$; y tambien por el producto de estos dos factores, que es

$$(x-3{,}31654)\,(x+3{,}31654)=x^2-10{,}999\ \&c.;$$

que podrémos reputar (184) en x^2-11.

335 Y pues acabamos de hallar que $x=3{,}6055$ es raiz de la (ec. 14″), resulta que igualmente lo será $x=-3{,}6055$; luego el primer miembro de la (ec. 14″) será tambien divisible por

$$(x-3{,}6055)\,(x+3{,}6055)=x^1-12{,}999\ \&c.;$$

que reputarémos (184) en x^2-13.

336 Dividiendo el primer miembro de la (ec. 14″) por x^2-11, é igualando á *cero* el cociente, (*) se tiene,

$$x^6+11x^4-169x^2-1859=0\ (14''').$$

(*) Como no hemos hecho todavía ninguna division en que el primer término del divisor sea x^2, pondrémos aquí el tipo de dicha operacion.

Colocado en un renglon el primer miembro de la (ec. 14″), y á su derecha el divisor x^2-11 separados ambos por la raya de dividir en esta forma:

$x^8 \quad - \quad 290x^4 +$	20449	x^2-11
$\perp$		
$+11x^6$	-20449	$x^6+11x^4\ldots\ldots$
$\perp$		$-169x^2-1859$
$+121x^4$	0	
$-169x^4-1859x^2$		
$\perp \qquad \perp$		

Principio dividiendo x^8 por x^2; para lo cual no tengo mas que poner x en el cociente con un esponente que sea la diferencia entre el esponente 8 de la x en el dividendo, y el esponente 2 de la x^2, en el divisor; luego el primer término del cociente, será x^6.

Multiplicando este cociente x^6 por x^2, primer tér-

Y dividiendo el primer miembro de esta ecuacion por x^2-13, é igualando á *cero* el cociente, resulta

$$x^4+24x^2+143=0 \quad (14^{\prime v});$$

cuyas raices (276... 5.°) son todas imaginarias.

Pero si querémos todavía otra comprobacion del método, apliquémosle á la (ec. $14'''$); y tendrémos, que suponiendo $x=1$, da -2016 de error. Suponiendo $x=2$, da -2295 de error; y como este es mayor, hallo la correccion al 1, multiplicando su error por -1; y dividiendo el producto $+2016$ por la diferencia de los dos errores, que es -279, da -7 para la correccion; que, agregada al 1, da -6.

Tomando -6 por *tercer número supuesto*, da $+1683623$ de error; que, siendo ya positivo, indica, que entre 1 y -6 hay al ménos una raiz real; y como

---

mino del divisor, resulta $+x^8$; y como se le ha de mudar el signo, se convierte en $-x^8$, que se destruirá con el x^8, primer término del dividendo; luego tacharé dicho primer término del dividendo, pasando por encima el lápiz, pluma ó yeso; lo que indico en el impreso, poniendo el segno $\perp$ debajo del x^8.

Paso á multiplicar el x^6 por -11, y mudando el signo al producto, resulta $+11x^6$, que pongo debajo del dividendo en un lugar que se halle entre el x^8 y el $-290x^4$. Continúo dividiendo $+11x^6$ por x^2, y el cociente $+11x^4$ lo pongo en el cociente al lado del x^6. Multiplico el $11x^4$ por x^2, y mudando el signo al producto se convierte en $-11x^6$, que se destruye con el $+11x^6$ que sirvió de dividendo; lo que indico en el impreso poniendo el signo $\perp$ debajo del $+11x^6$. Multiplico despues el $+11x^4$ por el -11 del divisor, y mudando el signo al producto, se tiene $+121x^4$, que coloco debajo del $-290x^4$ aunque sea en línea inferior al signo $\perp$ que se acaba de poner. Ahora se advierte que como el término $-290x^4$, y el $+121x^4$ tienen diferente signo, se restan los coeficientes y se pone el signo del término que tiene mayor coeficiente;

el error del -6 dista mucho del del 1, hago como supuesto intermedio $x=-4$, lo que da $+21589$ de error; y como este es todavía bastante mayor que el error del 1, hago otro supuesto intermedio, cual es $x=-3$, lo que da -1780 de error; que, siendo negativo, indica, que entre -3 y -4 hay al ménos una raiz real; y como el error de -3 es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por $-3--4=-3+4=1$; y dividiendo el producto -1780 por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es $+23369$, resulta $-0,08$ para la correccion; que, agregada al -3, da $-3,08$.

Tomando $-3,1$ por *sesto número supuesto*, da $-1548,609219$ de error; que, siendo negativo, in-

---

lo que da $-169x^4$, que coloco debajo de una raya en la misma columna.

Ahora, se continúa dividiendo $-169x^4$ por x^2, lo que da $-169x^2$, que pongo por tercer término del cociente.

Multiplico $-169x^2$ por x^2; y como su producto mudado el signo se destruye con el $-169x^4$, pongo el signo $\perp$ debajo de dicho término. Multiplico $-169x^2$ por -11, y mudando el signo al producto, resulta $-1859x^2$, que pongo debajo, pero de modo que esté entre la columna del x^4, y el término constante $+20449$.

Dividiendo $-1859x^2$ por x^2, resulta -1859 que se pone por cuarto término del cociente; multiplicando -1859 por x^2, y mudando el signo al producto, se tiene $+1859x^2$ que se destruye con el término que sirvió últimamente de dividendo, y por lo mismo pongo el signo $\perp$ debajo de él. Multiplico el -1859 por -11, y mudando el signo al producto, se tiene -20449 que puesto debajo del término constante $+20449$, se destruyen; por lo que tirando una raya debajo, queda o por resta.

dica, que entre —3,1 y —4 hay al ménos una raiz aeal; y como el error del —3,1 es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por —3,1——4=+0,9; y dividiendo el producto —1393,748 &c. por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es +23137,609219 &c., resulta —0,06 para la correccion; que, agregada al —3,1, da —3,16.

Tomando —3,2 por *séptimo número supuesto*, da —1362,394 &c. de error; que, siendo negativo, indica, que entre —3,2 y —4, hay al ménos una raiz real; y como el error del —3,2 es menor, hallo su correccion multiplicando su error por —3,2——4=+0,8; y dividiendo el producto —1089,915 &c. por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es +22951,394 &c, resulta —0,047 para la correccion; que, agregada al —3,2, da —3,247.

Tomando —3,25 por *octavo número supuesto*, da —946,879 &c. de error; que, siendo negativo, indica que entre —3,25 y —4 hay al ménos una raiz real; y como el error del —3,25 es numéricamente menor, hallo su correccion, multiplicando su error por —3,25——4=+0,75; y dividiendo el producto —710,1597 &c. por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es 22535,8796 &c., resulta —0,03 para la correccion; que, agregada al —3,25, da —3,28.

Tomando —3,3 por *noveno número supuesto*, da —834,119 &c. de error; que, siendo negativo, indica, que entre —3,3 y —4 hay al ménos una raiz real; y como el error del —3,3 es numéricamente menor, hallo su correccion, multiplicando su error por —3,3——4=+0,7; y dividiendo el producto —583,883 &c. por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es 22423,119131 &c.; resulta —0,026 para la correccion; que, agregada al —3,3, da —3,326.

Tomando —3,33 por *décimo número supuesto*, da

$-916,8913$ &c. de error; que, siendo negativo, indica, que entre $-3,33$ y -4 hay al ménos una raiz real; y como el error del $-3,33$ es menor, hallo su correccion, multiplicando su error por $-3,33--4=+0,67$; y dividiendo él producto $-614,317171$ &c. por la diferencia entre los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es $+22503,8911$ &c., resulta $-0,027$ para la correccion; que, agregada al $-3,33$, da $-3,357$.

Tomando $-3,4$ por *undécimo número supuesto*, da $-797,875984$ &c. de error; que, siendo negativo, indica, que entre $-3,4$ y -4 hay al ménos una raiz real; y como el error del $-3,4$ es numéricamente menor, hallo la correccion al $-3,4$, multiplicando su error por $-3,4--4=+0,6$; y dividiendo el producto $-478,7255$ &c. por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es $22386,875$ &c., resulta $-0,02$ para la correccion; que, agregada al $-3,4$, da $-3,42$.

Tomando $-3,42$ por *duodécimo número supuesto*, da $-730,693$ &c. de error; que, siendo negativo, indica, que entre $-3,42$ y -4 hay al ménos una raiz real; y como el error del $-3,42$ es numéricamente menor, hallo la correccion al $-3,42$, multiplicando su error por $-3,42--4=+0,58$; y dividiendo el producto $-423,8019$ &c. por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es $22319,69$ &c., resulta $-0,02$ para la correccion; que, que agregada al $-3,42$, da $-3,44$.

337. Aquí observamos, que las correcciones van siendo tan pequeñas, porque el error que da el -4 es mucho mayor que los del $-3,4$ y $-3,42$; por lo que será mas rápida la aproximacion, si hacemos algun supuesto intermedio entre $-3,42$ y -4. Suponiendo, pues $x=-3,7$, se obtiene $+434,6835$ de error; que, siendo positivo, indica, que entre $-3,42$ y $-3,7$ hay al ménos una raiz real; y como el error del $-3,7$ es numéricamente menor, hallo la correccion al $-3,7$, multiplicando su error por

$-3,7--3,42=-0,28$; y dividiendo el producto $-121,731$ &c. por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es $-1165,37656$ &c., resulta $-0,1$ para la correccion; que, egregada al $-3,7$, da $-3,6$.

Tomando $-3,6$ por *décimo cuarto número supuesto*, da $-25,400864$ &c. de error; que, siendo negativo, índica, que entre $-3,6$ y $-3,7$ hay al ménos una raiz real; y como el error del $-3,6$ es numéricamente menor, hallo la correccion al $-3,6$, multiplicando su error por $-3,6--3,7=+0,1$; y dividiendo el producto $-2,5400864$ &c. por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es $+436,6835$ &c., resulta $-0,005$ para la correccion; que, agregada al $-3,6$, da $3,605$.

Tomando $-3,605$ por *décimo quinto número supuesto*, da $-5,899568$ de error; que, siendo negativo, indica, que entre $-3,605$ y $-3,7$ hay al ménos una raiz real; y como el error del $-3,605$ es numéricamente menor,, hallo su correccíon, multiplicando su error por $-3,605--3,7=-3,605+3,7=+0,095$; y dividiendo el producto $-0,25548056$ &c. por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es $440,57$ &c., resulta $-0,0005$ para la correccion; que, agregada al $-3,605$, da $-3,6055$; que es en efecto la raiz que hallamos ántes.

338. Como la (ec. $14'''$) tiene pares todos los esponentes de la incógnita, resulta que en virtud de lo eopuesto (276... 4.°), la (ec. $14'''$) tendrá otra raiz negativa de igual valor numérico, esto es, será tambien raiz de la (ec. $14'''$) el valor $x=+3,6055$; y su primer miembro será divisible por $x+3,6055$ y por $x-3,6055$; y tambien por su producto

$$(x+3,6055)(x-3,6055)=x^2-12,999 \text{ \&c.}$$

que reputarémos en x^2-13. Practicando la division del espresado primer miembro de la (ec. $14'''$) por x^2-13, resulta por cociente x^4+24x^2+143; lo mismo que ántes, pues este valor es el primer miembro de la (ec. 14^{v}).

Luego hemos resuelto la (ec. 14), que es la mas complicada de su grado, con toda exactitud, y comprobándose todos los métodos.

339. Para ecuacion del grado 11.° elegirémos la siguiente:

$$x^{11}+121x^{10}+6435x^9+197835x^8+3889578x^7....$$
$$+51069018x^6+453714470x^5+2702025590x^4....$$
$$+10431670821x^3+24372200061x^2....$$
$$+29985521895x+13749310575=0 \ (15).$$

Para aplicarle el método, supongo $x=1$, lo que da $+81749626500$ de error; suponiendo $x=2$, se tiene $+317245174425$ de error; y como este es mayor, hallo la correccion al 1, multiplicando su error por -1; y dividiendo el producto -81749626500 dor la diferencia de los dos errores, que es $+235495547925$, resulta $-0,3$ para la correccion; que, agregada al 1, da 0,7.

Tomando 0,7 por *tercer número supuesto*, da $+38044384343,18$ &c. de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al 0,7, multiplicando su error por $07-1=-0,3$; y dividiendo el producto $-11413315302,9$ &c. por la diferencia de los dos menores errores, que es $+43705242156,816$ &c., resulta $-0,2$ para la correccion; que, agregada al 0,7, da 0,5.

Tomando 0,5 por *cuarto número supuesto*, da $+3628296469 4,9$ &c. de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al 0,5, multiplicando su error por $0,5-0,7=-0,2$; y dividiendo el producto $-7256592938,99$ &c. por la diferencia de los dos menores errores, que es $+1761419648,2$ &c., resulta $-4,1$ para la correccion; que, agregada al 0,5, da $0,5-4,1=-3,6$.

Tomando $-3,6$ por *quinto número supuesto*, da $-15784466 2672,9$ &c. de error; que, siendo negativo, indica, que entre 0,5 y $-3,6$ hay al ménos una raiz real; y como el error del 0,5 es menor, hallo la correccion, multiplicando su error

por 0,5— —3,6=+3,1; y dividiendo el producto +1144719055 4,19 &c., por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es —1941276273 67,9 &c., resulta —0,6 para la correccion; que, agregada al 0,5, da —0,1.

Tomando —0,1 por *sesto número supuesto*, da +1099121443 1,3 &c. de error; que, siendo positivo, indica, que entre —0,1 y —3,6 hay al ménos una raiz real; y como el error de —0,1 es numéricamente menor, hallo su correccion, multiplicando su error por —0,1— —3,6=—0,1+3,6=+3,5; y dividiendo el producto +40664493396,1 &c. por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es —16883587710 4,3 &c., resulta —0,2 para la correccion; que, agregada al —0,1, da —0,3.

Tomando —0,3 por *séptimo número supuesto*, da +697359847 6,1 &c. de error; que, siendo positivo, indica, que entre —0,3 y —3,6 hay al ménos una raiz real; y como el error de —0,3 es numéricamente menor, hallo su correccion, multiplicando su error por —0,3— —3,6=—0,3+3,6=—3,3; y divídiendo el producto +2307887498 2,3 &c. por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es —1648182611 49,1 &c., resulta —0,1 para la correccion; que, agregada al —0,3, da —0,4.

Tomando —0,4 por *octavo número supuesto*, da +505194564 8,9 &c. de error; que, siendo positivo, indica, que entre —0,4 y —3,6 hay al ménos una raiz real; y como el error del —0,4 es numéricamente menor, hallo su correccion, multiplicando su error por —0,4— —3,6=+3,2; y dividiendo el producto +1616622507 6,6 &c. por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es —1618966083 21,9 &c., resulta —0,1 para la correccion; que, agregada al —0,4, da —0,5,

Tomando —1 por *noveno número supuesto*, da 0 de error; por lo que inferimos que —1 es raiz de la (ec. 15).

340. Para encontrar las demas, divido el primer miembro de dicha (ec. 15) por $x+1$, é igualando á o el cociente, se tiene

$$x^{10}+120x^9+6315x^8+191520x^7+3698058x^6....$$
$$+47370960x^5+406343510x^4+2295682080x^3....$$
$$+8135988741x^2+16236211320x,...$$
$$+13749310575=0\ (15').$$

Para aplicarle el metodo, supongo $x=1$, lo que da $+40834803300$ de error; suponiendo $x=2$, da $+105411381375$ de error; y como este es mayor, hallo la correccion al 1, multiplicando su error por -1; y dividiendo el producto -40834803300 por la diferencia de los dos errores, que es $+64576578075$, resulta $-0,6$ para la correccion; que, agregada al 1, da $+0,4$.

Tomando $+0,4$ por *tercer número supuesto*, da 21701379792,4 &c. de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al 0,4, multiplicando su error por $0,4-1=-0,6$; y dividiendo el producto $-13020827877,4$ &c., por la diferencia de los dos menores errores, que es $+19133423507,5$ &c., resulta $-0,6$ para la correccion; que, agregada al 0,4, da $-0,2$.

Tomando $-0,2$ por *cuarto número supuesto*, da $+1080977629,1$ &c. de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al $-0,2$, multiplicando su error por $-0,2-0,4=-0,6$; y dividiendo el praducto $-648580657,5$ &c. por la diferencia de los dos menores errores, que es $+1089160206,3,2$ &c., resulta $-0,6$ para la correccion; que, agregada al $-0,2$, da $-0,8$.

Tomando -1 por *quinto número supuesto*, da $+371387120$ de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al -1, multiplicando su error por $-1--0,2=-1+0,2=-0,8$; y dividiendo el producto -297101596 por la diferencia de los dos menores errores, que es $+708590642 9,1$ &c., resulta $-0,4$ para la correccion; que, agregada al -1, da $-1,4$.

Tomando —1,4 por *sesto número supuesto*, da +28799563332,3 &c. de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al —1,4, multiplicando su error por —1,4——1=—0,4; y dividiendo el producto —115198532,9 &c. por la diferencia de los dos menores errores, que es +93391486,7,6 &c., resulta —1,2 para la correccion; que, agregada al —1,4, da —2,6.

Tomando —3 por *séptimo número supuesto*, da 0 de error; por lo que infiero (271... 6.[a]), que —3 es raiz de la mencionada (ec. 15′) y tambien lo será de la (ec. 15).

341. Para encontrar las demas, divido el primer miembro de la espresada (ec. 15′) por $x+3$; é igualando á *cero* el cociente, se tiene

$$x^9+117x^8+5964x^7+173628x^6+3177174x^5 \ldots$$
$$+37839438x^4+292825196x^3+1417206492x^2 \ldots$$
$$+3884369265x+4583103525=0\ (15'').$$

Para aplicarle el método, supongo $x=1$; lo que da 10218680700 de error; suponiendo $x=2$, se tiene 21082275417 de error; y como este es mayor, hallo la correccion al 1, multiplicando su error por —1; y dividiendo el producto —10218680700 por la diferencia de los dos errores, que es +10863594717, resulta —0,9 para la correccion; que, agregada al 1, da +0,1.

Tomando 0,1 por *tercer número supuesto*, da 4208449590,5 &c. de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al 0,1, multiplicando su error por 0,1—1=—0,9; y dividiendo el producto —462929549,6 &c. por la diferencia de los dos menores errores, que es +6010241109,45 &c., resulta —0,7 para la correccion; que, agregada al 0,1, da —0,6.

Tomando —1 por *cuarto número supuesto*, da +1856945600 de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al —1, multiplicando su er-

ror por $-1-0,1=-1,1$; y dividiendo el producto -2042640160 por la diferencia de los dos menores errores, que es $+2772348949,6$ &c., resulta $-0,7$ para la correccion; que, agregada al $-1,1$, da $-1,7$.

Tomando -2 por *quinto número supuesto*, da $+654729078$ de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al -2, multiplicando su error por $-2--1=-1$; y dividiendo el producto -654729078 por la diferencia de los dos menores errores, que es $+1202216522$, resulta $-0,5$ para la correccion; que, agregada al -2, da $-2,5$.

Tomando -3 por *sesto número supuesto*, da $+290203553$ de error; que, siendo menor que todos, hello la correccion al -3, multiplicando su error por $-3--2=-1$; y dividiendo el producto -290203553 por la diferencia de los dos menores errores, que es $+364515525$, resulta $-0,7$ para la correccion; que, agregada al -3, da $-3,7$.

Tomando -4 por *séptimo número supuesto*, da $+121300981$ de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al -4, multiplicando su error por $-4--3=-1$; y dividiendo el producso -121300981 por la diferencia de los dos menores errores, que es 168902572, resulta $-0,7$ para la correccion; que, agregada al -4, da $-4,7$.

Tomando -5 por *octavo número supuesto*, da o de error; por lo que infiero (271... 6.ª), que el -5 es raiz de la (ec. $15''$), y tambien lo será de las (ecs. $15'$ y 15).

342. Para encontrar las demas, divido el primer miembro de la (ec. $15''$) por $x+5$; é igualando á *cero* el cociente, se tiene

$$x^8+112x^7+5404x^6+146608x^5+2444134x^4\ldots$$
$$+25618768x^3+164731356x^2+593549712x\ldots$$
$$+916620705=0\ (15''').$$

Para aplicarle el método, supongo $x=1$; lo que da 1703117800 de error; suponiendo $x=2$, se tiene 3121753945 de error; y como este es mayor, ha-

llo la correccion al 1, multiplicando su error por —1; y dividiendo el producto —1703117800 por la diferencia de los dos errores, que es +1418636145, resulta —1,2 para la correccion; que, agregada al 1, da —0,2.

Tomando —0,2 por *tercer número supuesto*, da 80329840,7 &c. de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al —0,2, multiplicando su error por —0,2—1=—1,2; y dividiendo el producto —963958728,8 &c. por la diferencia de los dos menores errores, que es +899818859,2 &c., resulta —1 para la correccion; que, agregada al —0,2, da —1,2.

Tomando —1,2 por *cuarto número supuesto*, da +39625071 9,9 &c. de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al —1,2, multiplicando su error por —1,2——0,2=—1; y dividiendo el producto —396250719,9 &c. por la diferencia de los dos menores erreres, que es +407048220,8 &c., resulta —0,9 para la correccion; que, agregada al —1,2, da 2,1.

Tomando —2 por *quinto número supuesto*, da +20824525 de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al —2, multiplicando su error por —2——1,2=—2+1,2=—0,8; y dividiendo el producto —16659 4020 por la diferencia de los dos menores errores, que es +188008194,9 &c., resulta —0,88 para la correccion; que, agregada al —7, da —2,88.

Tomando —3 por *sesto número supuesto*, da +9189290 de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al —3, multiplicando su error por —3——2=—1; y dividiendo el producto —9169290 por la diferencia de los dos menores errores, que es +116343435, resulta —0,79 para la correccion; que, agregada al —3, da —3,79.

Tomando —4 por *séptimo número supuesto*, da +4445o543 de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al —4, multiplicando su error por —4——3=—1; y dividiendo el producto

—44450543 por la diferencia de los dos menores errores, que es +47448747, resulta —0,9 para la correccion; que, agregada al —4, da —4,9.

Tomando —5 por *octavo número supuesto*, da +10321920 de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al —5, multiplicando su error por —5——4=—1; y dividiendo el producto —10321920 por la diferencia de los dos menores errores, que es +34128623, resulta —0,3 para la correccion; que, agregada al —5, da —5,3.

Tomando —5,3 por *noveno número supuesto*, da +5887750,049 &c. de error; que, siendo menor que todos, hallo su correccion, multiplicando su error por —5,3——5=—0,3; y dividiendo el producto —1766325,0147 &c. por la diferencia de los dos menores errores, que es 4433169,951, resulta —0,4 para la correccion; que, agregada al —5,3, da —5,7.

Tomando —6 por *décimo número supuesto*, da 4037565 de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al —6, multiplicando su error por —6——5,3=—0,7; y dividiendo el producto —2826295,5 por la diferencia de los dos menores errores, que es +1850185,049, resulta —1 para la correccion; que, agregada al —6, da —7.

Tomando —7 por *undécimo número supuesto*, da 0 de error; por lo que infiero que —7 es raiz de la (ec. $15'''$); y tambien lo será de las (ecs. $15''$, $15'$ y 15).

343. Para encontrar las demas, divido el primer miembro de la (ec. $15'''$) por $x+7$; é igualando á *cero* el cociente, se tiene

$$x^7+105x^6+4669x^5+113925x^4+1646659x^3\dots$$
$$+14092155x^2+66086271x\dots$$
$$+130945815=0\ (15^v).$$

Para aplicarle el método, supongo $x=1$; lo que da +213889600 de error; suponiendo $x=2$, se tiene +334846495 de error; y como este es mayor, hallo la correccion al 1, multiplicando su error por

—1; y dividiendo el producto —21389600 por la diferencia de los dos menores errores, que es +120956893, resulta —1,7 para la correccion; que, agregada al 1, da —0,7.

Tomando —1 por *tercer número supuesto*, da 77415200 de error; y como es menor que todos, hallo la correccion al —1, multiplicando su error por —1—1=—2; y dividiendo el producto —154830402 por la diferencia de los dos menores errores, que es 136474400, resulta —1 para la correccion; que, agregada al —1, da —2.

Tomando —2 por *cuarto número supuesto*, da +43635800 de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al —2, multiplicando su error por —2——1=—1; y dividiendo el producto —43635800 por la diferencia de los dos menores errores, que es +33779400, resulta —1 para la correccion; que, agregada al —2, da —3.

Tomando —3 por *quinto número supuesto*, da +23224320 de error; que, siendo menor que todos, hallo su correccion, multiplicando su error por —3——2=—1; y dividiendo el producto —23224320 por la diferencia de los dos menores errores, que es 20401480, resulta —1 para la correccion; que, agregada al —3, da —4.

Tomando —4 por *sesto número supuesto*, da +11486475 de error; y como es menor que todos, hallo la correccion al —4, multiplicando su error por —4——3=—1; y dividiendo el producto —11486475 por la diferencia de los dos menores errores, que es +11737845, resulta —1 para la correccion; que, agregada al —4, da —5.

Tomando —5 por *séptimo número supuesto*, da +5181010 de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al —5, multiplicando su error por —5——4=—1; y dividiendo el producto —5181010 por la diferencia de los dos menores errores, que es 6305465, resulta —0,8 para la correccion; que, agregada al —5, da —5,8.

Tomando —6 por *octavo número supuesto*, da +3314125 de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al —6, multiplicando su error por —6— —5=—1; y dividiendo el producto —3314125 por la diferencia de los dos menores errores, que es 1766885, resulta —1,8 para la correccion; que, agregada al —6, da —7,8.

Tomando —8 por *noveno número supuesto*, da 135135 de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al —8, multiplicando su error por —8— —6=—2; y dividiendo el producto —270270 por la diferencia de los dos menores errores, que es 3178990, resulta —0,09 para la correccion; que, agregada al —8, da —8,09.

Tomando —8,1 por *décimo número supuesto*, da 118996,2 &c. de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al —8,1, multiplicando su error por —8,1— —8=—0,1; y dividiendo el producto —11899,6 &c. por la diferencia de los dos menoros errores, que es 16138,74 &c., resulta —0,2 para la correccion; que, agregada al —8,1, da —8,8.

Tomando —9 por *undécimo número supuesto*, da 0 de error; por lo que infiero que —9 es raiz de la (ec. $15'^{v}$) y tambien de las (ecs. $15'''$, $15''$ y 15).

344. Para encontrar las demas, divido el primer miembro de la (ec. $15'^{v}$) por $x+9$; é igualando á *cero* el cociente, se tiene

$$x^6+96x^5+3805x^4+79680x^3+929539x^2....$$
$$+5726304x+14549535=0\ (15^{v}).$$

Para aplicarle el método, supongo $x=1$; lo que da 21288959 de error; suponiendo $x=2$, se tiene 30401755 de error; y como este es mayor, hallo la correccion al 1, multiplicando su error por —1; y dividiendo el producto —21288959 por la diferencia de los dos errores que es 9112796, resulta —2 para la correccion; que, agregada al 1, da —1.

Tomando —1 por *tercer número supuesto*, da

9676800 de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al —1, multiplicando su error por —1—1=—2; y dividiendo el producto —19353600 por la diferencia de los dos menores errores, que es 1161215q, resulta —1,7 para la correccion; que, agregada al —1, da —2,7.

Tomando —3 por *cuarto número supuesto*, da 3870720 de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al —3, multiplicando su error por —3——1=—2; y dividíendo el producto —7741440 por la diferencia de los dos menores errores, que es 5806080, resulta —1 para la correccion; que, agregada al —3, da —4.

Tomando —4 por *quinto número supuesto*, da 2375273 de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al —4, multiplicando su error por —4——3=—1; y dividiendo el producto —2375273 por la diferencia de los dos menores errores, que es 1495447, resulta —1,5 para la correccion; que, agregada al —4, da —5,5.

Tomando —6 por *sesto número supuesto*, da 675675 de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al —6, multiplicando su error por —6——4=—2; y dividiendo el producto —1351350 por la diferencia de los dos menores errores, que es 1699598, resulta —0,7 para la correccion; que, agregada al —6, da —6,7.

Tomando —7 por *séptimo número supuesto*, da da +322539 de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al —7, multiplicando su error por —7——6=—1; y dividiendo el producto —322539 por la diferencia de los dos menores errores, que es 353136, resulta —0,9 para la correccion; que, agregada al —7, da —7,9.

Tomando —8 por *octavo número supuesto*, da +217135 de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al —8, multiplicando su error por —8——7=—1; y dividiendo el producto —217135 por la diferencia de los dos menores erro-

res, que es 105404, resulta —2 para la correccion; que, agregada al —8, da —10.

Tomando —10 por *noveno número supuesto*, da 80395 de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al —10, multiplicando su error por —10——8=—2; y dividiendo el producto —160790 por la diferencia de los dos menores errores, que es 206740, resulta —0,8 para la correccion; que, agregada al —10, da —10,7.

Tomando —11 por *décimo número supuesto*, da 0 de error; por lo que infiero que —11 es raiz de la (ec. 15^{v}), y tambien lo será de las

(ecs. 15^{iv}, $15'''$, $15''$, $15'$ y 15).

345. Para encontrar las demas, dívido el primer miembro de la (ec. 15^{v}) por $x+11$, é igualando á *cero* el cociente, se tiene

$$x^5+85x^4+2870x^3+48110x^2+400329x$$
$$+1322685=0\ (15^{VI}).$$

Para aplicarle el método, supongo $x=1$; lo que da 1774079 de error; suponiendo $x=2$, se tiene 2340155 de error; y como este es mayor, hallo la correccion al 1, multiplicando su error por —1; y dividiendo el producto —1774079 por la diferencia de los dos errores, que es 566076, resulta —3 para la correccion: que, agregada al 1, da —2.

Tomando —2 por *tercer número supuesto*, da +693809 de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al —2, multiplicando su error por —2—1=—3; y dividiendo el producto —2081427 por la diferencia de los dos menores errores, que es 1080270, resulta —1,9 para la correccion; que, agregada al —2, da —3,9.

Tomando —4 por *cuarto número supuesto*, da 428085 de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al —4, multiplicendo su error por —4——2=—2; y dividiendo el producto

—356170 por la diferencia de los dos menores errores, que es 265724, resulta —3 para la correccion; que, agregada al —4, da —7.

Tomando —7 por *quinto número supuesto*, da 182035 de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al —7, multiplicando su error por —7——4=—3; y dividiendo el producto —556105 por la diferencia de los dos menores errores, que es 246030, resulta —2 para la correccion; que, agregada al —7, da —9.

Tomando —9 por *sesto número supuesto*, da 32935 de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al —9, multiplicando su error por —9——7=—2; y dividiendo el producto —65570 por la diferencia de los dos menores errores, que es 149100, resulta —0,5 para la correccion; que, agregada al —9, da —9,5.

Tomando —10 por *séptimo número supuesto*, da 18395 de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al —10, multiplicando su error por —10——9=—1; y dividiendo el producto —18395 por la diferencia de los dos menores errores, que es 13540, resulta —1 para la correccion; que, agregado al —10, da —11.

Tomando —11 por *octavo número supuesto*, da +12860 de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al —11, multiplicando su error por —11——10=—1; y dividiendo el producto —12860 por la diferencia de los dos menores errores, que es 5335, resulta —2 para la correccion; que, agregada al —11, da —13.

Tomando —13 por *noveno número supuesto*, da 0 de error; por lo que infiero que —13 es raiz de la (ec. 15^{vi}) y tambien lo será de las ecs. (15^{v}, $15'^{v}$ y 15).

346. Para encontrar las demas, divido el primer miembro de la (ec. 15^{vi}) por $x+13$; é igualando á *cero* el cociente, se tiene,

$$x^4+72x^3+1934x^2 : 22968x+101745=0 \quad (15^{vii})$$

Para aplicarle el método, supongo $x=1$; lo que da 126720 de error; suponiendo $x=2$, se tiene 156009 de error; y como este es mayor, hallo la correccion al 1, multiplicando su errror por —1; y dividiendo el producto —126720 por la diferencia los errores, que es 39289, resulta —3 para la corrreccion; que, agregada al 1, da —2.

Tomando —2 por *tercer número supuesto*, da 62985 de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al —2, multiplicando su error por —2—1=—3; y dividiendo el producto —188955 por la diferencia de los dos menores errores, que es 63735, resulta —2,9 para la correccion; que, agregada al —2, da —4,9.

Tomando —5 por *cuarto número supuesto*, da 26885 de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al —5, multiplicando su error por —5——2=—3; y dividiendo el producto —80655 por la diferencia de los dos menores errores, que es 36100, resulta —2 para la correccion; que, agregada al —5, da —7.

Tomando —7 por *quinto número supuesto*, da 13340 de error; que, siendo menor que todos, hallo la corrreccion al —7, multiplicando su error por —7——5=—2; y dividiendo el producto —26680 por la diferencia de los dos menores errores, que es 13545, resulta —1,9 para la correccion; que, agregada al —7, da —8,9.

Tomando —9 por *sesto número supuesto*, da +5760 de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al —9, multiplicando su error por —9——7=—2; y dividiendo el producto —11520 por la diferencia de los dos menores errores, que es 7580, resulta —1,5 para la correccion; que, agregada al —9, da —10,5.

Tomando —11 por *séptimo número supuesto*, da 2020 de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al —11, multiplicando su error por —11——9=—2; y dividiendo el producto —4040

por la diferencia de los dos menores errores, que es 3740, resulta -1 para la correccion; que, agregada al -11, da -12.

Tomando -12 por *octavo número supuesto*, da 1045 de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al -12, multiplicando su error por $-12--11=-1$; y dividiendo el producto -1045 por la diferencia de los dos menores errores, que es 975, resulta -1 para la correccion; que, agregada al -12, da -13.

Tomando -13 por *noveno número supuesto*, da 384 de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al -13, multiplicando su error por $-13--12=-1$; y dividiendo el producto -384 por la diferencia de los dos menores errores, que es 659, resulta $-0,6$ para correccion; que, agregada al -13, da $-13,6$.

Tomando -14 por *décimo número supuesto*, da 105 de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al -14, multiplicando su error por $-4--13=-1$; y dividiendo el producto -105 por la diferencia de los dos menores errores, que es 179, resulta $-0,58$ para la correccion; que, agregada al -14, da $-14,58$.

Tomando -15 por *undécimo número supuesto*, da 0 de error; por lo que infiero que -15 es raiz de la (ec. $15^{v''}$); y tambien de las (ecs, $15^{v'}$, 15^{v} ...15).

347. Para encontrar las demas, divido el primer miembro de la (ec. $15^{v''}$) por $x+15$; é igualando á *cero* el cociente, se tiene

$$x^3+59x^2+1079x+6783=0 \quad (15^{\text{VIII}}).$$

Para aplicarle el método, supongo $x=1$; lo que da 7900 de error; suponiendo $x=2$ se tiene 9127 de error; y como este mayor, hallo la correccion al 1, multiplicando su error por -1; y dividiendo el producto -7900 por la diferencia de los errores, que es 1227, resulta -6 para la correccion; qne, agregada al 1, da -5.

Tomando —5 por *tercer número supuesto*, da 2688 de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al —5, multiplicando su error por —5—1=—6; y dividiendo el producto —16128 por la diferencia de los dos menores errores, que es 5212, resultá —3 para la correccion; que, agregada al —5, da —8.

Tomando —8 por *cuarto número supuesto*, da +1287 de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al —8, multiplicando su error por —8——5=—3; y dividiendo el producto —3861 por la diferencia de los dos menores errores, que es 1401, resulta —2,7 para la correccion; que, agregada al —8, da —10,7.

Tomando —11 por *quinto número supuesto*, da 372 de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al —11, multiplicando su error por —11——8=—3; y dividiendo el producto —1116 por la diferencia de los dos menores errores, que es 915, da —1 para la correccion; que, agregada al —11, da —12.

Tomando —12 por *sesto número supuesto*, da +315 de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al —12, multiplicando su error por —12——11=—1; y dividiendo el producto —315 por la diferencia de los dos menores errores, que es 57, da —5 para la correccion; que, agregada al —12, da —17.

Tomando —17 por *séptimo número supuesto*, da o de error; por lo que infiero que —17 es raiz de la (ec. 15^{viii}), y tambien de las (ecs. 15^{vi}, 15^{vi}... 15).

348. Para encontrar las demas, divido el primer miembro de la (ec. 15^{vii}) por $x+17$, é igualando á *cero* el cociente, se tiene

$$x^2+40x+399=0 \ (15^{ix}).$$

Para aplicarle el método, supongo $x=1$; lo que da 440 de error; suponiendo $x=2$, se tiene 483 de error; y como este es mayor, hallo la correccion al 1 multiplicando su error por —1; y dividiendo el pro-

ducto —440 por la diferencia de los errores, que es 43, resulta —10 para la correccion; que, agregada al 1, da —9.

Tomando —9 por *tercer número supuesto*, da 120 de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al —9, multiplicando su error por —9—1=—10; y dividiendo el producto —1200 por la diferencia de los dos menores errores, que es 320, resulta —3,7 para la correccion; que, agregada al —9, da —12,7.

Tomando —13 por *cuarto número supuesto*, da 48 de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al —13, multiplicando su error por —13——9=—4; y dividiendo el producto —192 por la diferencia de los dos menores errores, que es 72, resulta —2,7 para la correccion; que, agregada al —13, da —15,7.

Tomando —16 por *quinto número supuesto*, da 25 de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al —16, multiplicando su error, por —16——13=—3; y dividiendo el producto —75 por la diferencia de los dos menores errores, que es 23, resulta —3 para la correccion; que, agregada al —16, da —19.

Tomando —19 por *sesto número supuesto*, da 0 de error; por lo que infiero que —19 es raiz de la (ec. 15^{ix}) y tambien lo será de las

(ecs. 15^{viii}, 15^{vii}... y 15).

349. Para encontrar las demas, divido el primer miembro de la (ec. 15^{ix}) por $x+19$; é igualando á *cero* el cociente, se tiene

$$x+21=0 \quad (15^{x});$$

que trasladando el 21 al segundo miembro, se tiene $x=-21$. Luego —21 es raiz de la (ec. 15^{x}) y tambien lo será de las (ecs. 15^{ix}, 15^{viii}.... $15'$ y 15).

Luego las raices de la (ec. 15) son —1, —3, —5, —7, —9, —11, —13, —15, —17, —19 y —21; esto es, que son todas raices reales, y vienen espresadas por los números ímpares, desde el —1 hasta el

—21 ambos inclusive; y son todos negativos, para que se vea que el método en ningun caso falla.

350. Para ecuacion del grado 13, elegirémos la

$$601x^{13}-11419x^{12}+463x^5-8797x^4+619x^3....$$
$$-11761x^2+6126120x-116396280=0\ (16).$$

Para aplicarle el método, supongo $x=1$; lo que da —110300454 de error; suponiendo $x=2$, se tiene —145160920 de error; que, siendo mayor que el del 1, hallo la correccion al 1, multiplicando su error por —1; y dividiendo el producto +110300454 por la diferencia de los dos errores, que es —35860446, resulta —3 para la correccíon; que, agregada al 1, da —2.

Tomando —2 por *tercer número supuesto*, da —170551700 de error; que, siendo mayor que todos, y del mismo signo, indica que nos hallamos en el caso del número 10.° de la regla. Por lo cual, supondrémos $x=10$; lo que da —5409000197362180 de error; que, siendo todavía negativo, supongo $x=100$, lo que da +486810000000000375074525492 0 de error; que, siendo ya positivo, indica, que entre 10 y 100 hay al ménos una raiz real; y como el error del 100 es considerabilísimamente mayor que el del 10, hago como supuesto intermedio $x=50$; lo que da +5942549174632489945862220 de error; que, siendo positivo, indica, que entre 10 y 50 hay al ménos una raiz real; y como el error del 50 es muchísimo mayor que el del 10, hago como supuesto intermedio $x=20$; lo que da +2450696000080454320 de error; que, siendo positivo, indica, que entre 10 y 20 hay al ménos una raiz real; y como el error del 20 es todavía mucho mayor que el del 10, hago como supuesto intermedio $x=15$; lo que da —684898978956740025 de error; que siendo negativo, indica que entre 15 y 20 hay al ménos una raiz real; y como el error del 15 es menor, hallo la correcion al 15, multiplicando su error por 15—20=—5; y dividiendo el producto

$+3444494894783700125$ por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es $7657950211237142 95$, resulta 4 para la correccion; que, agregada el 15, da 19.

Tomando 19 por *octavo número supuesto*, da 0 de error; por lo que infiero que 19 es raiz de la (ec. 16).

351 Para encontrar las demas, divido el primer miembro de la mencionada (ec. 16) por $x-19$; é igualando á *cero* el cociente, se tiene

$$601x^{12}+463x^4+619x^2\ 6126120=0;$$

que, siendo positivos todos los términos, y pares todos los esponentes, resulta (276...5.°) que todas las raices de esta ecuacion son imaginarias; luego la (ec. 16) no tiene mas raiz real que la $x=19$, siendo imaginarias las otras doce (*).

352 Para ecuacion del grado 14, elegirémos la

$$x^{14}-5x^{13}-6x^{12}+3x^4-15x^3-11x^2-35x-42=0\ (17).$$

(*) Los que deséen comparar los métodos, podrán hacer uso de ellos para resolver la (ec. 16), y se convencerán indudablemente de la superioridad del nuestro. En dicha (ec. 16) tiene aplicacion el método conocido bajo el nombre de *divisores del último termino*, que nosotros esplicamos en los (§§ 371 y 372) del tomo 2.° parte 1.ª de *nuestro Tratado Elemental de Matemáticas;* y como el último término de dicha ecuacion tiene muchos divisores, seria curioso el averiguar en cuanto tiempo se resolvia por él dicha ecuacion y compararle con el tiempo que se gasta por el nuestro.

Para ejercicio de los principiantes, y que al mismo tiempo les sirva para poder comparar los métodos entre sí, y convencerse prácticamente de las ventajas del nuestro, ponemos aquí las dos siguientes ecuaciones:

$$991x^5-1973081x^4+701x^3-1395691x^2+383201280x\ldots$$
$$-762953748480=0;$$

$$103x^{29}-597{,}4x^{28}+101x^3-585{,}8x^2+574801920x\ldots$$
$$-3333851136=0.$$

Para aplicarle el método, supongo $x=1$; lo que da -109 de error; suponiendo $x=2$, se tiene -49271 de error; que, siendo numéricamente mayor que el del 1, hallo la correccion á este, multiplicando su error por -1; y dividiendo el producto $+109$ por la diferencia de los dos errores, que es -49271, resulta $-0,002$ para la correccion; que, agregada al 1, da 0,998.

Tomando 0,9 por *tercer número supuesto*, da $-104,01$ &c. de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al 0,9, multiplicando su error por $0,9-1=-0,1$; y dividiendo el producto $+10,4$ &c. por la diferencia de los dos menores errores, que es $-4,986$, resulta -2 para la correccion; que, agregada al 0,9, da $-1,1$.

Tomando -1 por *cuarto número supuesto*, da 0 de error; por lo que infiero que -1 es raiz de la mencionada ecuacion.

353. Para encontrar las demas, divido su primer miembro por $x+1$; é igualando á *cero* el cociente, se tiene

$$x^{13}-6x^{12}+3x^3-18x^2+7x-42=0 \quad (17').$$

Para aplicarle el método, supongo $x=1$; lo que da

Ambas están formadas en memoria y loor de nuestras dos idolatradas Reynas Isabel y Cristina. La primera es del *quinto grado*, porque esta es la edad del Iris de paz, ventura y prosperidad, que hoy reune las voluntades de todos los buenos Españoles. La única raiz real, que tiene, espresa justamente el número de dias trascurridos desde que nació, hasta uno de aquellos que formarán época en nuestra historia, y que hallará el que consiga resolver la ecuacion espresada. Con ser imaginarias todas las demas raices, hemos querido manifestar, que en España es quimérico todo lo que no sea Isabel II.

La otra ecuacion es del *grado veintinueve*, porque esta es la edad de la inmortal Cristina, verdadero Angel tutelar para los Españoles; y la única raiz real, que tiene, espresa tambien su edad en la citada época, pero referida á diferente unidad de tiempo.

—55 de error; suponiendo $x=2$, se tiene —16464 de error; y como este es numéricamente mayor, hallo la correccion al 1, multiplicando su error por —1; y dividiendo el producto +55 por la diferencia de los errores, que es —16469, resulta —0,003 para la correccion; que, agregada al 1, da 0,997.

Tomando 0,9 por *tercer número supuesto*, da —49,5 &c. de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al 0,9, multiplicando su error por 0,9—1=—0,1; y dividiendo el producto +4,95 &c. por la diferencia de los dos menores errores, que es —5,46 &c., resulta —0,906 para la correccion; que, agregada al 0,9, da —0,006.

Tomando —0,01 por *cuarto número supuesto*, da —42,07 &c. de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al —0,01, multiplicando su error por —0,01—0,9=—0,91; y dividiendo el producto +38,285 &c. por la diferencia de los dos menores errores, que es —7,46 &c., resulta —5 para la correccion; que, agregada al —0,01, da —5,01.

Tomando —5 por *quinto número supuesto*, da —1685834277 de error; que, siendo mayor que todos, indica que nos hallamos en el caso del número 10.º de la regla; por lo que supongo $x=10$; lo que da +4000000001172 de error; que, siendo positivo, y habiendo resultado negativo el del supuesto 2, se infiere, que entre 2 y 10 hay al ménos una raiz real; y como el error del 10 es considerablemente mayor que el del 2, hago como supuesto intermedio $x=5$; lo que da —244054207 de error; que, siendo negativo, indica, que entre 5 y 10, hay al ménos una raiz real; y como el error del 10 dista todavía muchísimo del del 5, hago como supuesto intermedio $x=8$; lo que da +137438953360 de error; que, teniendo todavía tres guarismos mas que el del 5, hago como supuesto intermedio, $x=7$; lo que da 16841988723 de error; que, teniendo todavía dos guarismos mas que el del 5, hago otro supuesto intermedio, cual es $x=6$;

lo que da 0 de error; por lo que infiero que 6 es raiz de la (ec. 17′).

354. Para encontrar las demas, divido el primer miembro de la (ec. 17′) por $x-6$; é igualando á *cero* el cociente, se tiene

$$x^{12}+3x^{2}+7=0\ (17'').$$

Y como todos los esponentes son pares, y todos los términos son positivos, se infiere (276... 5.°) que todas las raices de esta ecuacion son imaginarias; por lo que la (ec. 17) solo tiene reales las dos raices $x=-1$, y $x=+6$, siendo imaginarias las otras doce.

355. Para ecuacion del grado 18, elegiré la siguiente:

$$x^{18}-25x^{16}+5x^{6}-125x^{4}+11x^{2}-275=0\ (18).$$

Para aplicarle el método, supongo $x=1$; lo que da -405 de error; suponiendo $x=2$, da -788582 de error; y como este es numéricamente mayor, hallo la correccion al 1, multiplicando su error por -1; y dividiendo el producto $+405$ por la diferencia de los errores, que es -788177, resulta $-0{,}0005$ para la correccion; que, agregada al 1, da 0,9995.

Tomando 0,9 por *tercer número supuesto*, da $-349{,}47$ &c. de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al 0,9, multiplicando su error por $0{,}9-1=-0{,}1$; y dividiendo el producto $+34{,}94$ &c. por la diferencia de los dos menores errores, que es $-55{,}5$ &c., resulta $-0{,}6$ para la correccion; que, agregada al 0,9, da 0,3.

Tomando 0,3 por *cuarto número supuesto*, da $-275{,}01$ &c. de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al 0,3, multiplicando su error por $0{,}3-0{,}9=-0{,}6$; y dividiendo el producto $+165{,}11$ &c. por la diferencia de los dos menores errores, que es $-66{,}45$ &c., resulta $-2{,}5$ para la correccion; que, agregada al 0,3, da $-2{,}2$.

Tonando -2 por *quinto número supuesto*, da -1024183 de error; que, siendo numéricamente

mayor que todos, y del mismo signo, indica que nos hallamos en el caso del número 10.° de la regla. Por lo que supondrémos $x=10$; lo que da +75000000003750825 de error; que, siendo positivo, y habiendo resultado negativo el del 2, se infiere (276... 7.°) que entre 2 y 10, hay al ménos una raiz real; y como el error del 10 es considerablemente mayor que el del 2, hago como supuesto intermedio $x=6$; lo que da +3103220961307 de error; que, siendo positivo, indica, que entre 2 y 6 hay al ménos una raiz real; y como el error del 6 dista mucho todavía del del 2, hago como supuesto intermedio $x=4$; lo que da −8755325853321 de error; que, siendo negativo, indica, que entre 4 y 6 hay al ménos una raiz real; y como el error del 4, es todavía mucho menor que el del 6, hago como supuesto intermedio $x=5$; lo que da 0 de error; por lo que infiero que 5 es raiz de la (ec. 18).

356. Como todos los esponentes de la incógnita en dicha ecuacion son pares, inferimos (276... 4.°) que la misma ecuacion tiene otra raiz igual con −5. Por lo que, el primer miembro de la (ec. 18) será divisible por $x-5$ y por $x+5$; y tambien por su producto $(x-5)(x+5)=x^2-25$. Y dividiendo dicho primer miembro por x^2-25, é igualando el cociente á *cero*, se tiene

$$x^{16}+5x^4+11=0 \quad (18').$$

Y como todos los términos de esta ecuacion son positivos, y todos los esponentes de la incógnita son números pares, resulta (276... 5.°) que todas sus raices son imaginarias. Luego la (ec. 18) solo tiene reales las dos raices $x=5$ y $x=-5$.

357. Para ecuacion del grado 45, elegiré la

$$x^{45}-4x^{44}+3x^7-12x^6+237x-948=0 \quad (19).$$

Para aplicarle el método, supongo $x=1$; lo que da −723 de error; suponiendo $x=2$, da −35184372089690 de error; y como este es numéricamente mayor, hallo la correccion al 1, multi-

plicando su error por -1; y dividiendo el producto $+723$ por la diferencia de los dos errores, que es $-3518437208896 7$, resulta $-0,0000000002$ para la correccion; que, agregada al 1, da $0,9999999998$.

Tomando 0,9 por *tercer número supuesto*, da $-739,67$ &c. de error; y como el del 1 es numéricamente menor, hallo la correccion al 1, multiplicando su error por $1-0,9=0,1$; y dividiendo el producto $-72,3$ por la diferencia de los dos menores errores, que es $16,67$ &c., resulta 4 para la correccion; que, agregada al 1, da 5.

Tomando 5 por *cuarto número supuesto*, da $+56843418860808014869689941 87737$ de error; que, siendo ya positivo, y habiendo resultado negativo el del 2, indica que entre 2 y 5 hay al ménos una raiz real; y como el error del 5 es enormemente mayor que el del 2, hago como supuesto intermedio $x=3$; lo que da -984570902183611235305 de error; que, siendo negativo, indica, que entre 3 y 5 hay al ménos una raiz real; y como este error es todavía mucho mayor que el que resulta del cuarto número supuesto 5, hago como supuesto intermedio $x=4$; y como, sustituyendo 4 por x en el primer miembro de la (ec. 19), se convierte en 0, resulta (271... 6.ª), que 4 es raiz de la mencionada ecuacion.

358. Para encontrar las demas, divido el primer miembro de dicha (ec. 19) por $x-4$; é igualando á *cero* el cociente, se tiene

$$x^{44}+3x^{6}+237=0;$$

que en virtud de lo espuesto (276... 5.º) no tiene ninguna raiz real; y por lo mismo todas ellas son imaginarías; luego la ecuacion propuesta solo tiene una raiz real, que es $x=4$; y todas las otras 44 son imaginarias.

359. Para ecuacion del grado 50, elegiré la

$$x^{50}-9x^{48}+23x^{18}-207x^{16}+72x^{2}-648=0 \ (20).$$

Para aplicarle el método, supongo $x=1$; lo que

da -768 de error; suponiendo $x=2$, se tiene -1407374891090280 de error; y como este es numéricamente mayor, hallo la correccion al 1, multiplicando su error por -1; y dividiendo el producto $+768$ por la diferencia de los errores, que es -1407374891089512, resulta $-0,0000000000005$ para la correccion; que, agregada al 1, da $0,9999999999995$.

Tomando 0,9 por *tercer número supuesto*, da $-624,63$ &c. de error; y como es numéricamente menor que todos, hallo la correccion al 0,9, multiplicando su error por $0,9-1=-0,1$; y dividiendo el producto $+62,46$ &c. por la diferencia de los dos menores errores, que es $-143,362$ &c., resulta $-0,4$ para la correccion; que, agregada al 0,9, da 0,5.

Tomando 0,5 por *cuarto número supuesto*, da $-630,003$ &c. de error; que, siendo numéricamente mayor que el del 0,9, hallo la correccion al 0,9, multiplicando su error por $0,9-0,5=0,4$; y dividiendo el producto $-249,85$ &c. por la diferencia de los dos menores errores, que es $-5,3650$ &c., resulta $+47$ para la correccion; que, agregada al 0,9, da 47,9.

Si tomamos 48 por *quinto número supuesto*, se obtiene un resultado positivo, que contiene mas de ochenta guarismos. Y como el error del 2 era negativo, resulta que entre 2 y 48 hay al ménos una raiz real; pero teniendo el error del 2 solo diez y seis guarismos, se verifica que el error del 48 es enormemente mayor que el del 2; por lo que hago como supuesto intermedio $x=10$, lo que da un error positivo, y de cincuenta guarismos; lo cual indica que entre 2 y 10, hay al ménos una raiz real; y como el error del 10 es todavía considerablemente mayor que el del 2, hago como supuesto intermedio $x=4$; lo que da 5545971375998503638462973875 12 de error; que, siendo positivo, indica, que entre 2 y 4 hay al ménos una raiz real; y como este error todavía es mucho mayor que el del 2, hago como supuesto intermedio $x=3$; y sustituyendo 3 en vez de x en el primer miembro de

la (ec. 20), se convierte en *cero*; por lo que inferimos que 3 es raiz de dicha (ec. 20).

360. Para encontrar las demas, debería dividir el primer miembro de la (ec. 20) por $x-3$; pero como todos los esponentes de la incógnita son pares, resulta que en virtud de lo espuesto (276... 4.°), dicha ecuacion tendrá otra raiz igual negativa; luego se verificará tambien que $x=-3$; por consiguiente, el primer miembro de la ecuacion propuesta no solo será divisible por $x-3$, sinó tambien por $x+3$; y por el producto de estos dos factores, que es x^2-9.

361. Practicando, pues, la division del espresado primer miembro de la (ec. 20) por x^2-9; é igualando á *cero* el cociente, resulta

$$x^{48}+23x^{16}+72=0 \; (20');$$

y como todos los esponentes son pares, y todos los términos son positivos, resulta en virtud de lo espuesto (276... 5.°), que las cuarenta y ocho raices restantes de la (ec. 20) son imaginarias; teniendo solo dos raices reales, á saber $x=3$ y $x=-3$.

Con lo cual parece, que, habiendo resuelto un número tan variado y considerable de ecuaciones; y habiendo encontrado sus raices reales en todas ellas, no debe quedar la mas pequeña duda, de que este método no reconoce límite ni escepcion alguna.

CAPITULO 3.°

Resolucion de varias cuestiones, útiles al comercio y á todo lo que se comprende bajo el nombre de Aritmética política é industrial &c., &c.

362 *P.* ¿Cuál es el objeto de este capítulo?

R. El resolver por este nuevo método cuestiones de las que ocurren en la sociedad, ya relativas á *interés compuesto*, ya correspondientes á anualidades ó á otros ramos útiles, y que no se puedan resolver por nin-

guno de los métodos conocidos; ó si puede conseguirse su resolucion, es empleando teorías sublimes, como logaritmos, series y los Cálculos Diferencial é Integral, ó valiéndose de tablas calculadas de antemano.

363 *P.* ¿De qué cuestiones vamos á ocuparnos primeramente?

R. ¿De las de interés compuesto; pues todas las cuestiones relativas á interés simple, pueden resolverse por lo espresado (§§ 220, 221 y 222. Ar. de N.).

364 ¿Qué es enterés compuesto?

R. Interés compuesto es aquel en que *se acumula al capital, el interés de cada año para ganar entrambos reunidos el año siguiente.*

365 *P.* ¿Cómo me daréis á conocer bien exactamente lo que es interés compuesto?

R. Resolviendo una misma cuestion, tanto á interés simple, como á interés compuesto, y sea la siguiente. *Se han impuesto en una casa de comercio, en un banco etc.* 60000 *rs. al tres por ciento; y al cabo de ocho años, se ha de cobrar el capital ó principal que se ha impuesto, y los intereses que en todo este tiempo se hayan devengado.*

Resolucion de esta cuestion por el sistema de interés simple.

Para encontrar los intereses, que devenga esta cantidad en uno cualquiera de los ocho años, por ejemplo, en el primero, no tendré mas que hacer esta regla de tres simple directa: *si cien reales me dan tres reales de rédito al año, sesenta mil rs.* ¿Cuánto me deberán dar? Esta regla de tres queda escrito del modo siguiente, 100 : 3 :: 60000 : x; que, en virtud de lo espuesto (201), resultan 1800 rs. para el interés de un año; y como se supone que el capital está ocho años en el fondo, para averiguar los réditos, en los espresados ocho años, se formará esta regla de tres; *si en un año, los interéses ascienden á* 1800 *rs.; en* 8 *años ¿á cuánto ascenderán?*

Escribirémos esta regla de tres como aquí se ve.

$1:1800::8:x=14400$; y resulta, que los interéses que se habrán vencido, al cabo de los ocho años, son 14400 rs.; los que unidos al capital, componen 74400 rs.

366. Esta cuestion la hemos resuelto muy elementalmente, sin mas conocimientos que los de la Aritmética de Niños, y usando del método espuesto (§. 222); pero todavía se puede resolver esta misma cuestion de un modo mas breve y sencillo, y aun sin tener conocimiento de la regla de tres (cap. 11 Ar. de N.), ni de las proporciones (Ap. 1.º Ar. de N.), ni tener que discurrir sobre el modo de plantearla ni de resolverla.

Para darlo à conocer, observaré que las Matemáticas producen tal utilidad al género humano, que basta el que un Matemático resuelva una cuestion en general, y que luego traduzca el resultado en una regla práctica que, independientemente de toda reflexion ni operacion, conduzca al resultado que se necesita obtener; y el haber puesto en ejecucion esta idéa en la Aritmética de Niños, y en el *Tratado sobre el movimiento y aplicaciones de las aguas*, debe considerarse como un paso agigantado para generalizar y hacer populares unos conocimientos de tanta importancia y trascendencia; y por lo mismo, en este capítulo vamos á seguir un rumbo análogo; y será facilitar operaciones, que no se puedan resolver por los métodos conocidos, ni aun empleando cien veces mas tiempo y penalidades.

367. En este concepto, *cuando se da conocido el capital, el interés ó rédito que gana un real* en un año, y el número de años que el capital está puesto en el fondo, *los interéses*, al cabo de este tiempo, se hallan por la regla siguiente, *se multiplica el capital por el tiempo; y lo que resulte, se vuelve á multiplicar por el interés ó rédito de un real en un año.*

Así, en el caso actual, se multiplica 60000 rs. por 8 que son los años, y se obtiene 480000 rs.; esto se multiplica por el interés, que, siendo el 3 por cien-

to, se espresa $\frac{3}{100}$, ó por decimales en esta forma 0,03; multiplicando 480000 por 0,03, resulta (180) 14400.

Para encontrar directamente el *capital é intereses juntos*, que se deben percibir al fin del tiempo espresado, *se multiplica el interés por el tiempo; á esto se añade la unidod; y lo que resulte, se multiplica por el capital;* que, haciendo aplicacion á unestro caso, multiplico 0,03 por 8, lo que da 0,24; á esto agrego la unidad, y tengo 1,24; por esta cantidad multiplico el capital 60000 y saco 74400 rs.; que es el mismo resultado que obtuve ántes, pero hallado con mas sencillez.

368 ***P.*** ¿Se reducen á estas las ventajas que proporcionan las Matemáticas?

R. No señor; pues como dichas Ciencias todo lo hacen con jeneralidad, examinan cada uno de los casos que pueden ocurrir en las cuestiones; y de la resolucion principal, hacen tantas cuestiones subalternas, como pueden resultar de suponer conocidas todas las cantidades ménos cada una de por sí; y hallar la regla práctica que, en cada caso, debe ponerse en ejecucion para encontrarla. Por ejemplo, en la cuestion anterior, hay cuatro cosas que considerar, á saber: el capital que se impone, el interés ó rédito anual, el tiempo que el capital permanece en el fondo, y la suma total que se ha de percibir concluido el tiempo de la imposicion.

La cuestion, que acabamos de resolver, *es, dadas las tres primeras cantidades, hallar la cuarta; y pueden ocurrir, ademas, estas otras tres cuestiones, á saber: dado el capital que se impone, el interés que reditúa al año, y la suma total que se ha percibido al cabo de un cierto tiempo, hallar este tiempo.*

Dado el capital, el tiempo que está en el fondo, y la suma total, que se ha percibido por capital é intereses al cabo de dicho tiempo, hallar el rédito anual.

Dado el interés anual, el tiempo que un capital permanece en el fondo, y la suma total que, al cabo del espresado tiempo, se ha percibido por capital é intéreses, hallar cuanto es el capital.

369 *P.* Cuando se conoce el capital, el interés y la suma total, que al cabo de un cierto tiempo se ha percibido por capital é interéses; ¿cómo se hallará el tiempo que el capital estuvo en el fondo?

R. *Se resta de la suma total, el capital; y lo que resulte, se divide por el producto del capital por el rédito.*

Haciendo aplicacion á nuestro caso, de la suma total 74400 rs. resto el capital 60000; y la resta 14400 la parto por el producto del capital 60000 por el interés 0,03, que es 1800; y practicando la division de 14400 por 1800, resulta 8 para el número de años, que es lo que se verifica.

370 *P.* Cuando se conoce el capital, el tiempo que está en el fondo, y la suma total que se ha percibido al cabo de dicho tiempo, por capital é intereses ¿como se halla el interés ó rédito anual?

R. *De la suma total, se resta el capital; y la diferencia se divide por el producto del capital por el tiempo.*

Así es, que en nuestro caso, restarèmos de la suma total 74400, el capital 60000; y la diferencia 14400 la divído por el producto de 60000 por 8, que es 480000; y ejecutando la division de 14400 por 480000, resulta (170) 0,03; que es en efecto lo que correponde.

371 *P.* Cuando se conoce el interés anual, el tiempo que un capital ha estado en el fondo, y la suma que se ha percibido al cabo de dicho tiempo por capital é interéses ¿cómo se halla el capital?

R. *Se divide la suma total por lo que resulte de agregar la unidad al producto del interés por el tiempo.*

Haciendo aplicacion á nuestro caso, resulta que el producto del interés 0,03 por el tiempo 8 es 0,24;

añadiendo 1 á esto, se tiene 1,24; y dividiendo por esto la suma total 74400, resulta 60000; que es en efecto lo que corresponde. Luego quedan completamente resueltas la cuestion principal, y sus subalternas.

Resolucion de la misma cuestion á interés compuesto.

372 *P.* ¿Cómo me daréis á conocer el modo de resolver la misma cuestion á interés compuesto?

R. Del modo siguiente: puesto que un real da de interés ó rédito al año 0,03, resulta que al fin del año, se deberá cobrar por cada real y sus interéses 1,03. Para el 2.º año, debemos considerar 1,03 por nuevo capital; y harémos la siguiente regla de tres, 1 *real se convierte al cabo del* 1.er *año*, en 1,03; pues 1,03 que tengo por capital *pora el* 2.º *año*, ¿en qué se me convertirá?

Escribo la regla de tres del modo siguiente, $1:1{,}03::1{,}03:x=1{,}03\times1{,}03=(1{,}03)^2$. Discurriendo del mismo modo, tendré, que al cabo del 3.er año, 1 real se me habrá convertido en $(1{,}03)^3$; y al cabo de 8 años en $(1{,}03)^8$. Despues diré, 1 *real, al cabo de* 8 *años, se ha convertido á interés compuesto*, en $(1{,}03)^8$, el capital 60000 rs. ¿en qué se convertirá?

Y escribo la regla de tres de este modo,

$$1:(1{,}03)^8::60000:x=60000\times(1{,}03)^8.$$

Y ejecutando las operaciones, tendré que elevar 1,03 á la 8.ª potencia; lo que haré sucesivamente del modo que sigue:

La 2.ª potencia de 1,03 es

$$(1{,}03)^2=1{,}03\times1{,}03=1{,}0609.$$

La 3.ª potencia de 1,03 es

$$(1{,}03)^2\times1{,}03=1{,}092727.$$

La 4.ª potencia de 1,03 es

$$(1{,}03)^3\times1{,}03=1{,}12550881.$$

La 5.ª potencia de 1,03 es

$$(1{,}03)^4\times1{,}03=1{,}1592740743.$$

La 6.ª potencia de 1,03 es
$$(1,03)^5 \times 1,03 = 1,194052296529.$$
La 7.ª potencia de 1,03 es
$$(1,03)^6 \times 1,03 = 1,22987386542487.$$
La 8.ª potencia de 1,03 es
$$(1,03)^7 \times 1,03 = 1,2667700819876161.$$

Ahora, multiplicando esto por 60000 rs., obtengo 76006,204883256966. Si valuamos en mrs. el quebrado decimal, resultan 7 mrs. Luego, al cabo de los ocho años, tendré que percibir á interés compuesto, la suma de 76006 rs. y 7 mrs.; y como á interés simple, obtuvimos 74400 en los mismos ocho años, y con el mismo capital, resulta, que, á interes compuesto se perciben 1606 rs. y 7 mrs. mas que á interés simple; luego trae mas ventajas al dueño del capital el hacer la imposicion á interés compuesto que á interés simple.

373. En esta cuestion entran esencialmente cuatro cantidades, á saber: el capital, el tiempo que dura la imposicion; el rédito anual, ó mas bien lo que hay que percibir en un año por un real y por los interéses que produce en dicho año; y la suma total, que ha de percibirse al fin del tiempo de la misma imposicion.

Lo que hemos hecho hasta ahora, es hallar la suma total, dadas las tres primeras cosas conocidas. Pudiéramos haber hallado el resultado por la siguiente regla.

La suma de 1 real con el rédito anual del mismo real, elévese á una potencia espresada por el número de años de la misma imposicion; y lo que resulte multiplíquese por el capital; y se obtendrá la suma total que, al cabo del espresado tiempo; se habrá de percibir por el capital é interéses á interés compuesto; y practicando desde luego esta regla, sin necesidad de hacer ninguna proporcion ni regla de tres, se obtiene el mismo resultado.

374. Si, dado el interés anual de un real, el nú-

mero de años, y la suma total, que se ha percibido ó que se quiere percibir, se desease hallar el capital, no tendrémos mas que *dividir la suma total por la suma de un real con su interés anual, elevado á una potencia espresada por el número de años que el capital ha estado ó ha de estar en el fondo.*

Haciendo aplicacion á nuestro caso, deberémos dividir 76006,204883256966 por 1,03 elevado á la 8.ª potencia, que es 1,26677008138761 61; y obtenemos 60000 por resultado.

375. En los otros dos casos, que ofrece esta cuestion, no se puede resolver sin hacer uso de los logaritmos ó de otras tablas particulares calculadas de antemano; pero por nuestro método los podemos resolver sin mas conocimientos que los contenidos en la Aritmética de Niños. (*)

Si, dado un capital, el interés ó rédito anual de un real, quisiéramos hallar el número de años que ha estado ó ha de estar dicho capital en el fondo para que produzca la suma total, que tambien se da conocida, dividirémos la suma total por el capital; esto lo igualarémos con la suma de 1 reunida con el interês anual de 1 real elevado á una potencia que no conocemos, y que por lo mismo la espresarémos con la letra x. Haciendo aplicacion á nuestro caso, dividirémos 76006,204883256966 por 60000; y el cociente 1,26677008138761 61 lo igualarémos con $(1,03)^x$, y tendrémos $(1,03)^x=1,2667700813876161$; que, pasando el término constante al primer miembro, se tiene $(1,03)^x-1,2667700813876161=0$ (21).

(*) Una prueba de los recursos, que proporcionan las Matemáticas, es haber calculado unas tablas por cuyo medio se resuelven las cuestiones, tanto de interés simple como de interés compuesto, con muchísima sencillez. La obrita en que se hallan estas tablas tiene por título *El Algebra reemplazada por la Aritmética ect.*, por J. B. Juvigny, traducida al castellano por *Don José Perez Hervas.*

Para aplicarle el metodo, supongo $x=1$; lo que —0,23677 &c. de error. Suponiendo $x=2$, se tiene —0,20587 &c. de error; y como este es menor, hallo la correccion al 2, multiplicando su error por 1; y dividiendo el producto —0,20587 &c. por la diferencia de los errores, que es —0,0309, resulta +6 para la correccion; que, agregada al 2, da 8.

Tomando 8 por *tercer número supuesto*, da *cero* de error; luego 8 es raiz de la (ec. 21) como en efecto asi se verifica (*).

376 La última cuestion, relativa á esta materia, es la siguiente: *si, dado un capital, el número de años que ha estado ó debe estar en el fondo*, para producir una suma total determinada, quisiéramos hallar el interés anual de un real, *espresarémos por una incógnita el valor de un real junto con el interés de dicho real en un año; á esta incógnita pondrémos por esponente el número de años que habia estado ó deberia estar el capital en el fondo; de esto, restarémos el cociente que resulte de dividir la suma total pol el capital; lo que se igualará con cero; y aplicando el método á esta ecuacion, se hallará el valor de la incógnita que satisface mas próximamente á dicha ecuacion, de este valor se restará la unidad; y lo que quede, espresará el interés ó rédito anual.*

(*) Para manifestr el modo de resolver esta cuestion por medio de las tablas citadas en la nóta anterior, formaré ante todas cosas la siguiente proporcion.

Si 60000 rs. de capital producen 76006,205 &c. al 3 por 100 á interés compuesto en un determinado número de años; 1000 de capital ¿cuánto hubiera dado en el mismo tiempo y con las mismas condiciones? y resulta, como aquí se vé, $60000 : 76006,2048880 :: 1000 : x = 1266,77$, Se buscará este número en la primera tabla en la columna del 3 por 100; y el número que está en la columna horizontal mas á la izquierda en la columna de los años, que es 8, espresará el número de años, que es en efecto lo que corresponde.

Contrayéndonos á nuestro caso, y espresando ahora por x lo que resulte de sumar la unidad con el interés de un real al año, tendrémos

$$x^8-1{,}2667700813876161=0 \quad (22).$$

Para aplicarle el método, supongo $x=1$, lo que da $-0{,}26677$ &c. de error. Suponiendo $x=2$, se tiene $+254{,}73322$ &c. de error; que, siendo positivo, indica que entre 1 y 2 hay al ménos una raiz real; pero, siendo dicho error mucho mayor que el del 1, hago como supuesto intermedio $x=1{,}1$; lo que da $+0{,}87681$ de error; el cual, siendo positivo, indica que entre 1 y 1,1, hay al ménos una raiz real; y como el error del 1 es numéricamente menor; hallo la correccion al 1, multiplicando su error por $1-1{,}1=-0{,}1$; y dividiendo el producto $+0{,}026677$ &c. por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es $+1{,}14353$, resulta 0,02 para la correccion; que, agregada al 1, da 1,02.

Tomando 1,02 por *quinto número supuesto*, da $-0{,}09511$ &c. de error; que, siendo negativo, indica que entre 1,02 y 1,1 hay al ménos una raiz real; y como el error del 1,02 es numéricamente menor, hallo la correccion al 1,02, multiplicando su error por $1{,}02-1{,}1=-0{,}08$; y dividiendo el producto $+0{,}0076088$ &c. por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es 0,97192 &c., resulta 0,009 para la correccion; que, anregada al 1,02, da 1,029.

Tomando 1,03 por *sesto número supuesto*, da 0 de error; por lo que veo (271...6.ª) que 1,03 es el valor de x en la (ec. 22); ó lo que es lo mismo, la suma de un real, con el interés anual del mismo real es 1,03; y quitando de esto la unidad, resulta que el interés anual de un real es 0,03; ó poniéndolo en forma de quebrado comun, será $\frac{3}{100}$; lo cual quiere decir, que un real da al año

$\frac{3}{100}$ de interés ó rédito; ó que en un año 100 rs. dan 3; luego la imposicion se ha hecho al 3 por 100 (*).

377 *P.* ¿Hay alguna otra cuestion digna de considerarse?

R. Si señor; otro de los casos que pueden ocurrir acerca de las imposiciones, es el tener que cobrar una renta anual, y dejar de percibirla un cierto número de años, con la condicion de que se han de satisfacer los interéses, por el tiempo que dejan de pagarse las espresadas anualidades. Y como esto puede verificarse tanto á interés simple, como á interés compuesto, lo harémos por los dos métodos, contrayéndonos á la siguiente cuestion.

Hay que cobrar una suma anual de veinte mil reales; y se convienen el que la ha de pagar y el que la ha de percibir en no cobrarla hasta el fin del 9.º año, con tal que se abone el 4 por 100 anual de lo que deja de cobrarse; y se deséa saber, al calo del espresado año 9.º, cuanto deberá percibirse por las mencionadas anualidades y los interéses que devenguen, al rédito anual de 4 por 100.

Resolucion de esta cuestion, suponiendo que el 4 por 100, de interés convenido, es á interés simple.

378. Suponiendo que la renta no debe pagarse

(*) Esta cuestion se resuelve tambien con mucha facilidad por las tablas de que hemos hablado en las dos notas anteriores, del modo siguiente. Se forma la misma proporcion que en la nota última; y hallado el número 1266,77 por cuarto término, se busca en la misma primera tabla en la fila horizontal correspondiente al 8 que hay en la columna de los años, y el letrero que haya en la columna vertical donde se halla el 1266,77 será el que esprese la imposicion; y como en dicha columna se vé, en la parte superior, que dice 3 por 100, resulta en efecto el interés á que se hizo la imposicion.

hasta fin del primer año, resulta que, durante dicho primer año, no hay ningun interés que satisfacer; luego el interés del primer año es *cero*; ó lo que es lo mismo, no hay interés en dicho primer año. La renta, que deberá cobrarse al fin del 1er año, es 20000 rs.; por lo que, al 4 por 100 dará, en el 2.º año, lo que se obtenga por esta proporcion,

$$100 : 4 :: 20000 : x = \frac{20000 \times 4}{100} = \frac{80000}{100} = 800.$$

Durante el 3.er año, ganan réditos los 20000 rs. del 1.º, y los 20000 del 2º; y como 20000 rs. en un año dan 800 de réditos, las dos anualidades de á 20000 rs. que producen réditos en el 3.er año, ganarán *dos* veces 800 rs. que hacen 1600 rs.

Durante el 4.º año, ganan réditos tres anualidades, á saber: la del 1.er año, la del 2.º y la del 3.º; luego los réditos, durante el 4.º año, serán *tres* veces 800 rs., que hacen 2400 rs.

Por la misma razon, los réditos, en el 5.º año, serán *cuatro* veces 800 rs. que hacen 3200; en el 6.º serán 4000 rs.; en el 7.º serán 4800 rs.; en el 8.º serán 5600 rs.; y en el 9.º serán 6400 rs.

Sumando pues todos estos réditos, se tiene 28800 reales; y agregando á esto las *nueve* anualidades de á 20000 rs. que son 180000, resulta que, al fin del 9.º año, se deberá cobrar por capital é intereses 208800 rs.

379. Del mismo modo, pueden ocurrir aquí otros tres casos; y cada uno de ellos puede resolverse por una regla práctica, que, sin necesidad de recurrir á los conocimientos de reglas de tres, proporciones, ni aun detenerse en los preliminares relativos á planteos, conduzcan al verdadero resultado.

Así es, que la cuestion anterior podria haberse resuelto por la siguiente regla práctica: *multiplíquese el número de años, rebajado en una unidad, por el interés que da un real al año; agréguense á esto 2*

unidades; lo que resulte, se multiplicará por el producto del capital por el tiempo; y de lo que se obtenga, tómese la mitad; y se tendrá la *suma total, que, al cabo del espresado tiempo, se deberá percibir por las anualidades y réditos que estas hayan devengado á interés simple.*

Haciendo aplicacion á nuestro caso, multiplicarémos 9—1, que es 8, por 0,04, lo que da 0,32; agregando á esto 2 unidades, será 2,32; esto se debe multiplicar por el producto de 9 por 20000, que es 180000; efectuada la multiplicacion, resulta 417600; y dividiendo esto por 2, se tiene 208800, que es lo mismo que sacamos ántes.

380. La division por 2, la hubieramos podido evitar, y aun simplificar la multiplicacion, teniendo presente lo espuesto (132).

En efecto, ántes de hacer la multiplicacion del 2,32 por el producto de 9 por 20000, podríamos haber dividido por 2 el 2,32; ó el producto 180000; ó aun dividir por 2 el 20000, ántes de multiplicarle por el 9.

Lo harémos de todos los modos para que se perciba la útilidad de estas abreviaciones. A simple vista (132) se conoce que el 2,32 es divisible por 2, sin aumentar los guarismos decimales; y sin ninguna operacion formal, se puede poner desde luego el cociente, que es 1,16; multiplicando esto por 180000, resultan los mismos 208800.

Tambien se percibe desde luego, que el 180000 tiene mitad exactamente; y sin operacion formal, se conoce que es 90000; multiplicando 2,32 por 90000, se obtienen los mismos 208800.

Si ántes de multiplicar el 9 por 20000, hubieramos observado que el 20000 se puede dividir por 2, sin operacion ninguna preliminar, y que el cociente es 10000, hubiéramos multiplicado el 9 por 10000, lo que hubiera dado 90000; que, multiplicado por 2,32, da tambien 208800 como ántes.

No se ha puesto por regla general que, ántes

de efectuar el producto, se divida por 2, porque esto podría complicar, si lo que hace de dividendo no fuese un número divisible exactamente por 2.

381. Pasemos ya á otro de los casos. Si, dada la suma total, que se ha percibido al cabo de un cierto número de años, el tiempo que ha dejado de pagarse la anualidad, y el interés, que da un real al año, quisiéramos determinar á cuanto asciende la cantidad anual, la encontraríamos por la regla siguiente, *el duplo de la suma total percibida, se deberá dividir por el producto que resulte de multiplicar el tiempo por la suma de 2 con el producto del interés de un real por el número de años ménos uno.*

Haciendo aplicacion á nuestro caso, tendrémos, que el duplo de la suma total, es 417600; esto lo deberémos dividir por el producto de 9, por la suma de 2 con el producto de 8 por 0,04. Es decir, que deberémos dividir 417600 por 2088; lo que da 20000.

382. Si, dado el capital, la suma total que se ha percibido al cabo de un cierto número de años, y el interés de un real al año, se quisiese hallar el número de años, lo encontraríamos por la regla siguiente, *al cociente de dividir el duplo de la suma total por el producto del capital por el rédito, se agregará el cuadrado del cociente que resulte de dividir la diferencia entre 2 y el interés de un real, por el duplo de dicho interés. De esto, se estraerá la raiz cuadrada; y de lo que resulte, se restará el cociente de partir la diferencia entre 2 y el interés de un real, por el duplo de dicho interés.*

Haciendo aplicacion á nuestro caso, resulta que el duplo de la suma dividido por el producto del capital por el rédito de un real, es

$$\frac{417600}{20000.0,04}=\frac{4176}{200.0,04}=\frac{4176}{8}=522.$$

El cuadrado del cociente de 2 ménos el rédito de un real, dividido por el duplo del mismo rédito, es

$$\left(\frac{2-0,04}{2\times 0,04}\right)^2=\left(\frac{1,96}{0,08}\right)^2=(24,5)^2=600,25.$$

Sumando esto con 522, resulta 1122,25; cuya raiz cuadrada es 33,5.

La diferennia entre 2 y el rédito de un real, dividido por el duplo del mismo rédito, es

$$\frac{2-0,04}{2\times 0,04}=\frac{1,96}{0,08}=24,5.$$

Este valor, restado de 33,5, da 9; que es el número de años que dejó de pagarse la anualidad.

383. Si, dado el capital, la suma total, y el tiempo, quisiéramos hallar el rédito de un real, *del duplo de la suma total, quitaríamos el duplo del capital por el tiempo; y esto lo dividiríamos por el producto del capital por el tiempo multiplicado por el tiempo ménos una unidad.*

Haciendo aplicacion á nuestro caso, del duplo de la suma total, que es 417600, resto 360000, que es el duplo del capital 20000 por el tiempo, que es 9, y obtengo 57600. Esto lo debo dividir por el producto de 8 por 9 y por 20000, que es 1440000; y haciendo la division, resulta 0,04; que es lo que corresponde.

Resolucion de esta cuestion á interés compuesto.

384. Siendo 0,04 el interés, que da un real al año, al cabo de un año que esté un real en el fondo, tendrémos que percibir por un real y sus intereses $1+0,04=1,04$; y como al cabo del 1.er año, se deberán percibir 20000 rs., estos en el 2.° año, producirán un interés, que junto al capital, será

$$20000\times 1,04=20800.$$

Como en el 2.° año se ha de percibir la renta de 20000 rs.; y ademas, se tienen 20800 del 1.er año, y de sus intereses, resulta, que para el 3.er año, tenemos el capital $20800+20000=40800$, que se convertirá en $40800\times 1,04=42432$ al fin del tercer año,

Por la misma razon, al fin del 4.° año, tendrémos que percibir 20000+42432=62432 multiplicado por 1,04, que es 64929,28.

Al fin del 5.° año, tendrémos que cobrar 20000+64929,28=84929,28, multiplicado por 1,04, que es 88326,4512.

Al fin del 6.° año, tendrémos que cobrar el producto de 108326,4512 por 1,04, que es 112659,509248.

Al fin del 7.° año, habrá que percibir el producto de 132659,509248 por 1,04, que es 137965,88961792.

Al fin del 8.° año, habrá que percibir el producto de 157965,88961792 por 1,04, que es 164284,5252026368.

Y al fin del 9.° año, se tendrá que cobrar el producto de 184284,5252026368 por 1,04, que es 191655,906210742272; y ademas la anualidad del año 9.°; por lo que será 211655,906210742272.

385. Podríamos haber llegado á este resultado por la regla que sigue: *elévese á una potencia, espresada por el número de las anualidades, el agregado de 1 real con el interés anual del mismo real; de esto, quítese la unidad, y esto multiplíquese por el capital; y el producto divídase por el interés de un real al año.*

Practicando esta regla en nuestro caso, tendrémos que elevar 1,04 á la potencia 9.ª; lo que da 1,423311812421484544; quitando la unidad, y multiplicando por 20000, resulta 8466,236248429690088; que dividido (182) por 0,04 da 211655,906210742272; que es en efecto, lo que ántes sacamos.

386. Si, conocida la suma total, el interés, y el número de años, que se dejaba de cobrar la anualidad, quisiéramos hallar el capital, *multiplicaríamos la suma total por el interés de un real; y esto lo partiríamos por el agregado de un real y sus interéses en un año, elevado á una potencia espresada por el número de años, quitando de ella la unidad.* Haciendo aplicacion á nuestro caso, tendrémos que el producto

de la suma total por el interés de 1 real es 8466,236248429690888. La potencia 9.ª de 1,04, quitándole la unidad, es 0,4233118124214845444; dividiendo la cantidad anterior por esta, resulta 20000.

387. De las otras dos cuestiones, que resultan para encontrar el *tiempo* y el *interés*, dadas las demas cosas conocidas, la una no se puede hallar, por los medios que hasta ahora han suministrado las Matemáticas, sinó empleando los logaritmos, ó las tablas de que hemos hablado (nota del §. 375); la otra se puede resolver por dichas tablas, si se calculan para todos los casos que puedan ocurrir; pero los logaritmos no bastan. Mas por el nuevo método, se pueden resolver sin mas conocimientos que los de la Aritmética de Niños, como vamos á manifesiar.

Para encontrar el tiempo, cuando se da conocido el capital, el interés de un real y la suma total, formarémos la ecuacion á que se debe aplicar el nuevo método, del modo siguiente. *Al agregado de un real con sus interéses, en un año, póngase por esponente la incógnita x*, que aquí podría ser la t; pero usarémos de la x para proceder con uniformidad; *quítese de esto el producto de la suma total por el interés de un real dividido por el capital, agregando la unidad á todo ésto, y se tendrá la ecuacion á que se ha de aplicar el método para determinar el tiempo.*

Como aquí el interés de un real en un año es 0,04, el primer miembro de la ecuacion será $(0{,}04)^x$; la suma total multiplicada por el interés es 8466,236248429690888; que, dividido por el capital 20000, da 0,4233118124214845444; y agregando á esto la unidad, y poniéndolo todo en el primer miembro, con signo negativo, tendrémos

$$(1{,}04)^x - 1{,}4233118124214845444 = 0 \quad (23).$$

Para aplicar el método á esta ecuacion, supongo $x=1$, lo que da $-0{,}3833118124214845444$ de error. Suponiendo $x=2$, se tiene $-0{,}3417118124214845444$ de error; y como este es numéricamente menor, hallo la correccion al 2, multiplicando su error por 1; y

dividiendo el producto —0,341711812421484544 por la diferencia de los errores, que es —0,0416, resulta 8 para la correccion; que, agregada al 2, da 10.

Tomando 10 por *tercer número supuesto*, da +0,05693247249685938176 de error; que, siendo positivo, indica, que el valor de x se halla entre 2 y 10; y como el error del 10 es numéricamente menor, hallo su correccion, multiplicando su error por 10—2=8; y dividiendo el producto 0,45545977997487505408 por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es —0,39864428491834392576, resulta —1 para la correccion; que, agregada al 10, da 9.

Tomando 9 por *cuarto número supuesto*, resulta 0 de error; por lo que veo que 9 es raiz de la ecuacion; lo que en efecto se verifica (*).

388. Para encontrar el interés de un real cuando se conoce el capital, la suma total y el número de años, se formará una ecuacion en que el primer término sea el agregado de 1 con la incognita x, elevado esto á una potencia *espresada por el número de años; el segundo término será el cociente de la suma total por el capital multiplicado por la misma incógnita; y el tercer término será la unidad negativa*; é igualando esto con *cero*, se tendrá *la ecuacion á que se deberá aplicar el método.*

(*) Para manifestar el modo de hallar el tiempo con el auxilio de las tablas, de que se ha hablado (nota del § 375), procederémos del modo siguiente. Si de la suma total 211655,906 &c. quitamos la 9.ª annualidad 20000, que no ha ganado interés, resulta 191655,906 &c.; y formarémos la siguiente proporcion, *veinte mil rs. al interes compuesto del 4 por 100 han producido, durante un cierto número de años, que no se conoce, la suma de* 191655,906 &c.; 1000 *rs. en las mismas circunstancias ¿cuánto producirán?* y se halla 9582,79. Búsquese este número en la tabla 4.ª en la columna del 4 por 100, y véase el número de años que hay en la columna mas á la izquierda en el mismo renglon, y se verá que son 9, como en efecto debe así verificarse.

Contrayéndonos á nuestro caso, será

$$(1+x)^9 - \frac{211655,906210742272}{20000} x - 1 = 0$$; que practicando la division, se tiene

$$(1+x)^9 - 10.5827953105771136x - 1 = 0 \quad (24).$$

Para aplicarle el método, supongo $x=1$; lo que da 500,45 de error. Suponiendo $x=2$, da 1966o,8 &c. de error; y como este es mayor, hallo la correccion al 1, multiplicando su error por -1; y dividiendo el producto $-500,4172$ &c. por la diferencia de los errores, que es 19160,4 &c., resulta $-0,02$ para la correccion; que, agregada al 1, da 0,98.

Tomando 0,9 por *tercer número supuesto*, da 312,163 &c. de error; que, siendo menor que el del 1, hallo su correccion, multiplicando su error por $0,9-1=-0,1$; y dividiendo el producto $-31,2163$ &c. por la diferencia de los dos menores errores, que es 198,8369 &c., resulta $-0,2$ para la correccion; que, agregada al 0,9, da 0,7.

Tomando 0,7 por *cuarto número supuesto*, da 110,179 &c. de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al 0,7, multiplicando su error por $0,7-0,9=-0,2$; y dividiendo el producto $-22,035$ &c. por la diferencia de los dos menores errores, que es 201,9 &c., resulta $-0,1$ para la correccion; que, agregada al 0,7, da 0,6.

Tomando 0,6 por *quinto número supuesto*, da 61,3 &c, de error; y como es menor que todos, hallo la correccion al 0,6, multiplicando su error por $0,6-0,7=-0,1$; y dividiendo el producto $-6,13$ &c. por la diferencia de los dos menores errores, que es 48,8 &c., resulta $-0,1$ para la correccion; que, agregada al 0,6, da 0,5.

Tomando 0,5 por *sesto número supuesto*, da 32,15 &c. de error; y como es menor que todos, hallo la correccion al 0,5, multiplicando su error por $0,5-0,6=-0,1$; y dividiendo el producto $-3,215$ &c. por la diferencia de los dos menores errores, que es

29,2 &c., resulta —0,1 para la correccion; que, agregada al 0,5, da 0,4.

Tomando 0,4 por *séptimo número supuesto*, da 18,42 &c. de error; y como es menor que todos, hallo su correccion, multiplicando su error por 0,4—0,5=—0,1; y dividiendo el producto —1,542 &c, por la diferencia de los dos menores errores, que es 16,7 &c., resulta —0,1 para la correccion; que, agregada al 0,4, da 0,3.

Tomando 0,3 por *octavo número supuesto*, da 6,4296 &c. de error; y como es menor que todos, hallo la correccion al 0,3, multiplicando su error por 0,3—0,4=—0,1; y dividiendo el producto —0,6429 &c. por la diferencia de los dos menores errores, que es 9,0 &c., resulta 0,07 para la correccion; que, agregada al 0,3, da 0,23.

Tomando 0,2 por *noveno número supuesto*, da 2,0432 &c. de error; y como es menor que todos, hallo la correccion al 0,2, multiplicando su error por 0,2—0,3=—0,1; y dividiendo el producto —0,20432 &c. por la diferencia de los dos menores errores, que es 4,386 &c., resulta —0,05 para la correccion; que, agregada al 0,2, da 0,15.

Tomando 0,15 por *décimo número supuesto*, da 0,930457 &c. de error; y como es menor que todos, hallo la correccion al 0,15, multiplicando su error por 0,15—0,2=—0,05; y dividiendo el producto —0,0793709 &c. por la diferencia de los dos menores errores, que es 1,1128 &c., resulta —0,007 para la correccion; que, agregada al 0,15, da 0,08.

Tomando 0,08 por *undécimo número supuesto*, da 0,152381 &c. de error; y como es menor que todos, hallo su correccion, multiplicando su error por 0,08—0,15=—0,07; y dividiendo el producto 0,0106666 &c. por la diferencia de los dos menores errores, que es 0,73867 &c., resulta —0,01 para la correccion; que, agregada al 0,08, da 0,07.

Tomando 0,07 por *duodécimo número supuesto*, da 0,09766 &c. de error; y como es menor que to-

dos, hallo la correccion al 0,07, multiplicando su error por 0,07—0,08=—0,01; y dividiendo el producto —0,0009766 &c. por la diferencia de los dos menores errores, que es 0,05472 &c., resulta —0,018 para la correccion; que, agregada al 0,07, da 0,052.

Tomando 0,05 por *décimo tercero número supuesto*, da +0,022188 &c. de error; y como es menor que todos, hallo la correccion al 0,05, multiplicando su error por 0,05—0,07=—0,02; y dividiendo el producto —0,0004437 &c. por la diferencia de los dos menores errores, que es 0,07548 &c., resulta —0,006 para la correccion; que, agregada al 0,05, da 0,044.

Tomando 0,04 por *décimo cuarto número supuesto*, da *cero* de error; por lo que veo (271... 6.ª) que el 0,04 es raiz de la (ec. 24); luego el rédito de un real en un año, es $0,04 = \frac{4}{100}$; lo que quiere decir, que la imposicion se ha hecho al 4 por 100.

389. Esta cuestion, repetimos, que ni aun por logaritmos se puede resolver con exactitud; pues aunque se llega á formar una ecuacion en que el primer miembro es un logaritmo y el segundo otro, sin embargo, se hallan comprendidas otras cantidades, ademas del interés, bajo el signo logarítmico; pero nuestro método, que no tiene escepcion alguna, da el resultado en esta cuestion por el procedimiento general, asi como en todas las demas (*).

390 *P.* ¿Me podréis resolver por este nuevo mé-

(*) Para manifestar el modo de hallar el mismo resultado por las tablas, de que se ha hablado (nota del § 375), formarémos la misma proporcion que en la nota anterior; y el número 9582,79, lo buscarémos en la columna horizontal que empieza á la izquierda por 9; y despues de hallado, no hay mas que ver el letrero que tiene encima la columna en que se contenga el espresado número 9582,79; y se halla que dice 4 por 100, que es en efecto el rédito á que se ha hecho la imposicion.

todo algunas cuestiones relativas á esta materia, que no se puedan resolver por las tablas calculadas de antemano, de que se ha hablado en las notas de los (§§ 375, 376, 387 y 389)?

R. Sí señor: nos propondrémos resolver las dos que siguen.

1.ª *Un comerciante, cuyo capital es de* 44400 *duros, separa de su fondo, al principio de cada año,* 3000 *duros para el gasto de su casa; pero en virtud de tener su comercio muy arreglado, aumenta todos los años su fondo en una cierta parte, que no se conoce, del resto de su caudal; al cabo de* 5 *años pierde en una quiebra* $15333\frac{1}{3}$ *duros; y con este motivo ajusta las cuentas de su casa; y halla que ha triplicado su capital. Se deséa saber qué parte es la del aumento del resto del capital cada año.* Esta cuestion nos proporciona hacer diferentes reflexiones útiles al plantearla; pues nos ofrece cosas nuevas en este género.

Plantéo. Su capital era de 44400 duros; en el principio del 1.er año separó 3000; luego le quedaron para su comercio $44400-3000=41400$; y al fin del primer año se debió hallar con esta cantidad, y ademas con el aumento, que le proporcionaba su comercio, que era una cierta parte de esta resta 41400; y como esta cierta parte no la conocemos, la espresarémos por x y tendrémos que el aumento será $\frac{41400}{x}$; luego al fin del primer año su capital ó fondo estará espresado por la cantidad $41400+\frac{41400}{x}$; que reduciendo (138), el entero á la especie del quebrado que le acompaña, se convierte en $\frac{41400x+41400}{x}$.

Al principio del 2.º año, separa 3000 duros para el gasto de su casa; luego, durante el 2.º año, le que-

darán para su giro $\frac{41400x+41400}{x}-3000$; que, reduciendo el entero á la especie del quebrado, se convierte en $\frac{41400x+41400-3000x}{x}=\frac{38400x+41400}{x}$.

Aumenta en la parte x de esta misma cantidad; luego el aumento es $\frac{\frac{38400x+41400}{x}}{x}$; que, en virtud de lo espuesto (152), se convierte en $\frac{38400x+41400}{x^2}$.

Agregando este aumento al fondo, que tenía en principio del 2.° año, despues de separado lo necesario al gasto de su casa, resulta que al cabo del 2.° año, tiene

$$\frac{38400x+41400}{x}+\frac{38400x+41400}{x^2};$$

y como para reducir estos quebrados á un comun denominador, basta multiplicar (126) por x los dos términos del primero, resulta que ejecutándolo, y sumando despues los numeradores, y reduciendo, se tendrá

$$\frac{38400x^2+41400x+38400x+41400}{x^2}....$$

$$=\frac{38400x^2+79800x+41400}{x^2}.$$

Con este fondo principia el 3.er año; y separando de él los 3000 duros del gasto de su casa, resul-

ta que para su giro, durante dicho 3.er año, tiene

$$\frac{38400x^2+79800x+41400}{x^2}-3000\ldots$$

$$=\frac{38400x^2+79800x+41400-3000x^2}{x^2}\ldots$$

$$=\frac{35400x^2+79800x+41400}{x^2}.$$

El aumento, durante dicho 3.er año, es esta misma cantidad partida por x; luego será (152)

$$\frac{35400x^2+79800x+41400}{x^3}.$$

Agregando este aumento al fondo que tenía al principio del tercer año, despues de separado el gasto de su casa y hechas las operaciones, que se van indicando, tiene

$$\frac{35400x^2+79800x+41400}{x^2}+\frac{35400x^2+79800x+41400}{x^3}\ldots$$

$$=\frac{35400x^3+79800x^2+41400x+35400x^2+79800x+41400}{x^3}$$

$$=\frac{35400x^3+115200x^2+121200x+41400}{x^3}.$$

Esta cantidad era su capital ó fondo al fin del 3.er año.

En principio del 4.° año, separa 3000 duros para el gasto de su casa, y le queda para su comercio, durante dicho 4.° año, la cantidad

$$\frac{35400x^3+115200x^2+121200x+41400}{x^3}-3000\ldots$$

$$=\frac{35400x^3+115200x^2+121200x+41400-3000x^3}{x^3}\ldots$$

$$=\frac{32400x^3+115200x^2+121200x+41400}{x^3}.$$

El aumento que obtuvo, durante el 4.° año, es esta misma cantidad partida por x; luego dicho aumento será (152)

$$\frac{32400x^3+115200x^2+121200x+41400}{x^4}.$$

Luego, al fin del 4.° año, se hallará con la suma de estas dos cantidades; que, haciendo las operaciones convenientes, será

$$\frac{32400x^4+147600x^3+236400x^2+162600x+41400}{x^4}.$$

Si de esta cantidad, quitamos los 3000 duros para el gasto de la casa, tendrémos que, al principio del 5.° año, tiene como fondo para su giro

$$\frac{29400x^4+147600x^3+236400x^2+162600x+41400}{x^4}.$$

Al fin del espresado 5.° año, debe tener esta misma cantidad, y ademas el aumento, que es

$$\frac{29400x^4+147600x^3+236400x^2+162600x+41400}{x^5}.$$

Sumando estas dos partidas, nos resultará lo que por esta causa debe tener al fin del espresado 5.° año; que, haciendo las operaciones, resulta

$$\frac{29400x^5+177000x^4+384000x^3+399000x^2\ldots}{x^5}\ldots\ldots$$

$$\frac{+204000x+41400}{x^5}\ (*).$$

(*) Con poner los puntos suspensivos tanto en el numerador del quebrado, como enfrente de la raya, se da á conocer, que lo que hay en este renglon, debía ser continuacion del de arriba, no habiendo mas que un solo quebrado.

Pero la cuestion dice que perdió en una quiebra al fin del 5.º año la cantidad de $15333\frac{1}{3}$ duros. Luego al fin del citado 5.º año, su fondo estaba espresado por la diferencia entre estas cantidades, esto es, por

$$\frac{29400x^5+177000x^4+384000x^3+399000x^2\ldots}{x^5}\ldots\ldots,$$

$$\frac{+204000x+41400}{x^5}-15333\frac{1}{3}.$$

Ahora, la cuestion dice, que había triplicado su capital; y como este era de 44400 duros, su triplo será $44400\times3=133200$; luego la espresion anterior debería ser igual con 133200; haciendo la igualacion, se tendrá

$$\frac{29400x^5+177000x^4+384000x^3+399000x^2+204000x\ldots}{x^5}\ldots$$

$$\frac{+41400}{x^5}-15333\frac{1}{3}=133200.$$

Pasando el $15333\frac{1}{3}$ del primer miembro al segun- con el signo contrario, y reduciéndolos á uno por la suma, la ecuacion se convierte en

$$\frac{29400x^5+177000x^4+384000x^3+399000x^2\ldots}{x^5}\ldots\ldots$$

$$\frac{+204000x+41400}{x^5}=148533\frac{1}{3}=\frac{445600}{3}.$$

Si multiplicamos ambos miembros por $3x^5$, nos desaparecerá el denominador x^5 del 1.º y el 3 del 2.º; y queda reducída la operacion á multiplicar el numerador del primer miembro por 3, y el del 2.º por x^5; lo que da

$$88200x^5+531000x^4+1152000x^3+1197000x^2\ldots\ldots$$
$$+612000x+124200=445600x^5.$$

Si trasladamos la cantidad que hay en el 2.º miembro al 1.º, tendrémos en este los dos términos

$88200x^5$ y $-445600x^5$; que, haciendo la reduccion, resulta, que el conjunto de estos dos términos equivale á $-357400x^5$.

Como este es el término en que la incógnita x tiene el mayor esponente, y en general conviene que tenga el signo positivo, aunque para este nuevo método nada importa el que sea negativo el signo del primer término, harémos que dicho primer término resulte positivo, para conformarnos con el uso; esto se consigue mudando los signos á todos los términos de la ecuacion. Lo cual no la altera, porque esto equivale (271... 2.ª) á poner el primer miembro por segundo; y nos resultará

$$357400x^5-531000x^4-1152000x^3-1197000x^2....$$
$$-612000x-124200=0.$$

Suprimiendo dos ceros en cada término, lo cual equivale á dividir toda la ecuacion por 100, se nos convierte en

$$3574x^5-5310x^4-11520x^3-11970x^2-6120x....$$
$$-1242=0\ (25).$$

391. Para aplicarle el método, supongo $x=1$; lo que da -32588 de error. Suponiendo $x=2$, se tiene -124114 de error; y como este es mayor, hallo la correccion al 1, multiplicando su error por -1; y dividiendo el producto $+32588$ por la diferencia de los errores, que es -91526, resulta $-0,3$ para la correccion; que, agregada al 1, da $1-0,3=0,7$.

Tomando 0,7 por *tercer número supuesto*, da $-16016,9$ &c. de error; y como es menor que todos, hallo la correccion al 0,7, multiplicando su error por $0,7-1=-0,3$; y dividiendo el producto $+4805,07$, &c. por la diferencia de los dos menores errores, que es $-32588--16016,9$ &c. $=-16571,09$ &c., resulta $-0,28$ para la correccion; que, agregada al 0,7, da $0,7-0,28=0,42$.

Tomando 0,4 por *cuarto número supuesto*, da $-6441,8$ &c. de error; y como es menor que todos, hallo la correccion al 0,4, multiplicando su error por

0,4—0,7=—0,3; y dividiendo el producto 1932,5 &c. por la diferencia de los dos menores errores, que es —9575,09, resulta —0,2 para la correccion; que, agregada al 0,4, da 0,2.

Tomando 0,2 por *quinto número supuesto*, da —3044,3 &c. de error; y como es menor que todos, hallo la correccion al 0,2, multiplicando su error por 0,2—0,4=—0,2; y dividiendo el producto 608,8 &c. por la diferencia de los dos menores errores, que es —3397,5 &c., resulta —0,1 para la correccion; que, agregada al 0,2, da 0,1.

Tomando 0,1 por *sesto número supuesto*, da —1985,7 &c. de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al 0,1, multiplicando su error por 0,1—0,2=—0,1; y dividiendo el producto +198,57 &c. por la diferencia de los dos menores errores, que es —1058,5 &c. resulta —0,19 para la correccion; que, agregada al 0,1, da —0,09.

Tomando —0,1 por *séptimo número supuesto*, da —738,7 &c. de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al —0,1, multiplicando su error por —0,1—0,1=—0,2; y dividiendo el producto +147,7 &c. por la diferencia de los dos menores errores, que es —1246,9 &c., resulta —0,1 para la correccion; que, agregada al —0,1, da —0,2.

Tomando —0,2, por *octavo número supuesto*, da —414,2 &c. de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al —0,2, multiplicando su error por —0,2—0,1=—0,3; y dividiendo el producto 124,2 &c. por la diferencia de los dos menores errores, que es —324,4 &c., resulta —0,4 para la correccion; que, agregada al —0,2, da —0,6.

Tomando —0,6 por *noveno número supuesto*, da —356,9 &c. de error; que, siendo menor que todos, hallo la correccion al —0,6, multiplicando su error por —0,6——0,2=—0,4; y dividiendo el producto 142,2 &c. por la diferencia de los dos menores errores, que es —57,3 &c., resulta —2, para la correccion; que, agregada al —0,6, da —2,6.

Tomando —3 por *décimo número supuesto*, da —1078164 de error; que, siendo mayor que todos, y del mismo signo, indica que nos hallamos en el caso 10.º de la regla; por lo que supondrémos $x=10$; lo que da +291520558 de error; que, siendo positivo, y habiendo resultado negativo el del 2, manifiesta (276...7.º) que entre 2 y 10 hay al ménos una raiz real; y como el error del 10 tiene tres guarismos mas que el del 2, hago como supuesto intermedio $x=5$; lo que da +6078908 de error; que, siendo positivo, indica que entre 2 y 5 hay al ménos una raiz real; y como el error del 5 es mucho mayor que el del 2, hago como supuesto intermedio $x=4$, lo que da +1355894 de error; que, siendo positivo, indica que entre 2, y 4 hay al ménos una raiz real; y aunque todavía el error del 4 es mas de diez veces mayor que el error del 2, procederémos á encontrar la correccion al 2. Para esto, multiplico su error —124114 por 2—4=—2; y dividiendo el producto 248228 por la diferencia de los dos menores errores, que es 1480008, resulta 0,1 para la correccion; que, agregada al 2, da 2,1.

Tomando 2,1 por *décimo tercero número supuesto*, da —130872,06 &c. de error; que, siendo negativo, indica que entre 2,1 y 4 hay al ménos una raiz real; y como el error del 2,1 es numéricamente menor que el del 4, hallo la correccion al 2,1, multiplicando su error por 2,1—4=—1,9; y dividiendo el producto 248656,9 &c., por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es 1486766,06 &c., resulta 0,1 para la correccion; que, agregada al 2,1, da 2,2.

Aquí observamos que la correccion va siendo tan pequeña, porque el error del 4 y los del 2 y del 2,1 distan mucho entre sí; no supusimos desde luego $x=3$, como el método indicaba, porque sabemos que esta es la raiz, y á fin de que el método vaya dándola por grados; mas ahora, para no gastar tanto tiempo en hallar correcciones tan pequeñas, y sin hacer

el supuesto 3, para que el metodo se manifieste mejor, harémos como supuesto intermedio $x=3,5$, lo que da $+417085,4$ &c. de error; que, siendo positivo, y habiendo resultado negativo el del supuesto 2,1, indica que entre 2,1, y 3,5 hay al ménos una raiz real; y como el error del 2,1, es menor, hallo su correccion, multiplicando su error, por $2,1-3,5=-1,4$; y dividiendo el producto 183220,8 &c, por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es $+547957,4$ &c., resulta 0,3 para la correccion; que, agregada al 2,1, da 2,4.

Tomando 2,4 por *décimo quinto número supuesto*, da $-135718,5$ &c. de error; que, siendo negativo, indica que entre 2,4 y 3,5 hay al ménos una raiz real; y como el error del 2,4 es menor, hallo la correccion al 2,4, multiplicando su error por $2,4-3,5=-1,1$; y dividiendo el producto $+149290,4$ &c. por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es 552803,9 &c. resulta 0,27 para la correccion; que, agregada al 2,4, da 2,67.

Tomando 3 por *décimo sesto número supuesto*, da 0 de error; por lo que veo (271...6.ª) que 3 es raiz de la (ec. 25); y como x espresa la parte de aumento, que recibe cada año el capital, que el comerciante empléa en él; resulta, que el aumento es la *tercera* parte. Comprobémoslo.

392 El capital del comerciante era 44400 duros; sacó en principio del 1.er año 3000 duros; le quedaron por consiguiente 41400 duros; la tercera parte de esto es 13800 duros, que agregados á los 41400, resulta, que al fin del primer año, se encontraba con 55200 duros; al principio del 2.º año, separa 3000 para el gasto de su casa, y le quedan para su giro en dicho 2.º año, 52200 duros; la 3.ª parte de esto es 17400; que, agregada á los 52200, se encuentra al fin del 2.º año con 69600. Separa de estos, al principio del 3.er año, los 3000 del gasto de su

casa, y le quedan para su giro en dicho 3.er año 66600; la tercera parte de esto es 22200; luego al fin del 3.er año se halla con 88800 duros. Separa al principio del 4.° año los 3000, para el gasto de su casa, y le quedan para su giro en aquel año 85800 duros. La 3.a parte de esto es 28600; que, agregada á los 85800, componen 114400 duros, con los que se halla al fin del espresado 4.° año.

En principio del 5.° año separa 3000 duros para el gasto de su casa, y le quedan para su giro 111400. La 3.a parte de esto es $37133\frac{1}{3}$; que añadidos á los 111400, componen $148533\frac{1}{3}$. La quiebra le quitó $15333\frac{1}{3}$, por lo que le quedó $148533\frac{1}{3}-15333\frac{1}{3}=133200$; que es cabalmente el triplo de 44400, que era su caudal primitivo; luego la cuestion queda resuelta y comprobada.

393 2.a *Un capitalista impuso en un banco el primer dia de un año, 100000 rs.; al principio del 2.° año, 250000; al principio del 3.er año 300000; al principio del 4.° año, 280000; al principio del 5.° año, 400000; al principio del 6.° año, 230000; al principio del 7.° año, sacó del fondo 240000 rs.; al principio del 8.° año, puso 50000; al principio del 9.° año, sacó 20000; al principio del 10.° año, ni aumentó ni sacó nada. Todas estas imposiciones se hicieron á interés compuesto, es decir, aglomerando los interéses sucesivos al capital para que tambien ganasen interes ó rédito; al cabo del espresado décimo año, se ajustaron las cuentas, y percibió el comerciante 2651688,93176 rs. Se pregunta ¿cual fué el interés, con que se hicieron las espresadas imposiciones?*

Plantéo. Como no conocemos el interés ó rédito, con que se hace la imposicion, resulta que esta será la incógnita; y así, el interés ó rédito, que da 1 real al fin del año, lo espresarémos por r, por ser inicial de rédito; y tendrémos que al cabo del 1.er año, 1 real se habrá convertido en $1+$ el interés r, á cuyo agregado le llamarémos x, y tendrémos $1+r=x$.

Como al principio del 1.er año, se impusieron 100000 rs., y cada real se nos convierte en x al fin del 1.er año, resulta, que al cabo del espresado 1.er año, el capital 100000, se habrá convertido en $100000x$.

Si á esto añadimos 250000, que impuso al principio del 2.º año, resulta, que el capital, con que se hallaba al principio del 2.º año, era

$$100000x+250000.$$

Esta cantidad, en el mismo supuesto de que 1 real se convierte en x al cabo de un año, se convertirá al fin del 2.º año en

$$(100000x+250000)x=100000x^2+250000x.$$

Añadiendo á esta cantidad los 300000, que impuso al principio del 3.er año, resulta, que la cantidad, que en principio del 3.er año está impuesta en el fondo, es

$$100000x^2+250000x+300000.$$

Esta cantidad, en el mismo supuesto, se convertirá al fin del 3.er año en

$$100000x^3+250000x^2+300000x.$$

Si añadimos á esto, los 280000, que impuso de nuevo en el principio del 4.º año, resulta, que al principio del mencionado 4.º año, tenía en el fondo esta cantidad.

$$100000x^3+250000x^2+300000x+280000.$$

Por la misma razon de ántes, al fin del 4.º año, tendrá

$$100000x^4+250000x^3+300000x^2+280000x.$$

Al principio del 5.º año, tendrá en el fondo $100000x^4+250000x^3+300000x^2+280000x+400000$; y el fin del espresado 5.º año, se habrán convertido en

$$100000x^5+250000x^4+300000x^3+280000x^2+400000x.$$

Al principio del 6.° año, por la misma razon tenía en el fondo $100000x^5+250000x^4+300000x^3\ldots\ldots+280000x^2+400000x+230000$; y al fin del dicho año 6.°, esta cantidad se le habrá convertido en

$$100000x^6+250000x^5+300000x^4+280000x^3\ldots\ldots+400000x^2+230000x.$$

Al principio del 7.° año, sacó del fondo 240000; por consiguiente quedó en èl para ganar réditos, la cantidad de

$$100000x^6+250000x^5+300000x^4+280000x^3\ldots\ldots 400000x^2+230000x-240000.$$

Por consiguiente, al fin del 7.° año, esto se habrá convertido en

$$100000x^7+250000x^6+300000x^5+280000x^4\ldots\ldots 400000x^3+230000x^2-240000x.$$

Al principio del 8.° año impuso 50000 rs.; luego en aquella época tenía en el fondo

$$100000x^7+250000x^6+300000x^5+280000x^4\ldots\ldots+400000x^3+230000x^2-240000x+50000.$$

Y al fin del mencionado 8.° año, tendría en el fondo la cantidad de

$$100000x^8+250000x^7+300000x^6+280000x^5\ldots\ldots+400000x^4+230000x^3-240000x^2+50000x.$$

Al principio del 9.° año, sacó 20000 rs. del fondo; luego en dicha época, tenía en el fondo

$$100000x^8+250000x^7+300000z^6+280000x^7\ldots\ldots+400000x^4+230000x^3-240000x^2+50000x-20000.$$

Y al fin del espresado 9.° año, esta cantidad se le habrá convertido en

$$100000x^9+250000x^8+300000x^7+280000x^6\ldots\ldots+400000x^5+230000x^4-240000x^3+50000x^2-20000x.$$

Y como en el 10.° año, no hubo imposicion, ni se

sacó cantidad alguna, resulta, que al principio del 10.º año, tenía en el fondo la cantidad acabada de espresar; y al fin del mencionado décimo año, le resultaba en el fondo, por lo dicho ántes, la cantidad de

$$100000x^{10}+250000x^9+300000x^8+280000x^7+400000x^6..$$
$$+230000x^5-240000x^4+50000x^3-20000x^2.$$

Y como la condicion es, que, al cabo de este tiempo, recibió 2651688,93176 rs. deberémos igualar la espresion anterior con esta cantidad; y trasladando esta al 1.er miembro para que el 2.º sea *cero*, tendrémos

$$100000x^{10}+250000x^9+300000x^8+200000x^7+400000x^6...$$
$$+230000x^5-240000x^4+50000x^3-20000x^2...$$
$$-2651688,93176=0.$$

Podemos suprimir en todos los términos cuatro ceros, y hacer la coma cuatro lugares mas á la izquierda en el último término; lo que equivale á dividir todos los términos de la ecuacion por 10000, lo que no la altera, y resultará

$$10x^{10}+25x^9+30x^8+20x^7+40x^6+23x^5-24x^4+5x^3-2x^2...$$
$$-265,168893176=0\ (26).$$

394. Para aplicarle el método, supongo $x=1$; lo que da $-138,168893176$ de error; suponiendo $x=2$ se tiene 35958,83110682 4 de error; que, siendo positivo, indica, que entre 1 y 2 hay al ménos una raiz real; y como el error del 2 es considerablemente, mayor que el del 1, hago como supuesto intermedio $x=1,5$; lo que da 2904,307669324 de error; que, siendo positivo, indica, que entre 1, y 1,5 hay al ménos una raiz real; y como el error del 1,5 es todavía mucho mayor que el del 1, hago como supuesto intermedio $x=1,2$, lo que da 259,065424648 de error; que, siendo positivo, y habiendo resultado negativo el del supuesto 1, indica, que entre 1 y 1,2 hay al ménos una raiz real; y como el error del 1, es numéricamente menor, hallo la correccion al 1, multipli-

cando su error por $1-1{,}2=-0{,}2$; y dividiendo el producto $+27{,}6337786352$ por la diferencia de los dos errores mas próximos de signos contrarios, que es $397{,}234317824$, resulta $0{,}069$ para la correccion; que, agregada al 1, da 1,069.

Tomando 1,1 por *quinto nùmero supuesto*, da o de error; por lo que veo (271... 6.ª) que 1,1 es raiz de la espresada (ec. 26); luego este será el valor de x en dicha ecuacion; y como x representa (393) un real junto con los interéses correspondientes á este real en un año, resulta, que quitando 1, del valor hallado 1,1, queda 0,1 para el rédito anual de un real; y como $0{,}1=\frac{1}{10}=\frac{10}{100}$, resulta que el interés de *la imposicion* ha sido al 10 por 100.

Con lo cual parece haberse cumplido todo lo enunciado.

FIN.

Erratas importantes.

En la página 36 hemos puesto por producto del error 13,5626 por 1,85, que es la diferencia de los dos números supuestos, la cantidad de 10,036324; y no debe ser sinó 25,090625. Dividido esto por la diferencia de los errores, que es 20,9974, resulta 1,2 para la correccion; la cual, agregada al número supuesto 9,25, da 10, 45.

Este debió ser el valor, tomado para *quinto número supuesto*, y no el 9,72 que allí se tomó. Sin embargo de haber cometido este descuido, hemos hallado el verdadero y exacto resultado; lo que comprueba la circunstancia singularísima de este nuevo método, de conducir al verdadero resultado aun cuando uno cometa yerros de cálculo. Mas, puesto que hemos advertido este descuido, vamos á seguir el cálculo, tomándole en consideracion, y hallarémos el mismo resultado con mas brevedad.

En efecto, tomando 10,45 por *quinto número supuesto*, da 3,6025 de error; y como es menor que el del 9,25, hallo la correccion al 10,45, multiplicando su error por 10,45—9,25=1,20; y dividiendo el producto 4,323 por la diferencia de los dos menores errores, que es 13,5625—3,6025=9,96, resulta 0,43 para la correccion; que, agregada al 10,45, da 10,88.

Ya podemos tomar aquí el 11 por número supuesto, y obtendrémos 0 de error; que es decir, llegamos á la raiz mas brevemente. Si quisieramos tomar 10,88 por otro número supuesto, hallaríamos 0,7344 de error; y 0,11 para la correccion; que, agregada al 10,88, resultaba 10,99, que le falta solo una centésima para el 11.

En la página 40 línea 10 por abajo, pusimos =0,59, y debía ser —0,59. Y ademas de este descuido, se cometió otro, cual era el tomar por supuesto ante-

rior 10,75, cuando debía ser 9,72; y como á pesar de esto, se encontró allí la verdadera raiz 11, tenemos en esto una nueva corroboracion de las ventajas del método. Y para tener otra prueba mas, seguirémos aquí enmendando dichos yerros, de este modo.

Para encontrar la correcccion, que se debe hacer al 11,1, multiplico el menor error, que es —0,59 por 11,1—9,72=1,38; y dividiendo el producto —0,8142 por la diferencia de los dos menores errores, que es 9,3184——0,59=9,9084, resulta —0,08 para la correccion; que, agregada al 11,1, da 11,02; que se puede tomar ya por el 11, verdadera raiz.

Y pues que, tanto con los descuidos cometidos en el final de la página 40, como con la rectificacion que acabamos de hacer, obtenemos la verdadera raiz 11, sin mayor complicacion, es todavía una nueva comprobacion de las singulares prerogativas, utilidades y ventajas de este nuevo método.

TABLA DE LOS CAPÍTULOS.

CATÁLOGO
DE LAS OBRAS DEL AUTOR.

OBRAS DE INSTRUCCION PRIMARIA.

1 *Coleccion de la clave y reglas generales para aprender á leer, en los mayores caractéres que se han encontrado en Francia, Inglaterra y Holanda.* Su precio 40 rs.

2 *Coleccion de la clave y reglas generales para aprender á leer, en carácter de gran cánon:* su precio 4 rs.

3 *Nueva cartilla para aprender á leer en mucho ménos de la mitad del tiempo que por todos los métodos conocidos:* 1 real.

4 *Clave analítica de la lectura, del tamaño de un pliego, impresa en cartulina con la instruccion práctica al respaldo:* 10 cuartos.

5 *Reglas generales para aprender á leer, un pliego de cartulina impreso por ambos lados:* 10 cuartos.

6 *Reglas generales para aprender á leer, en forma de libro, á manera de cartilla:* 6 cuartos.

7 *Clave analítica de la lectura en medio pliego de cartulina:* 5 cuartos.

8 *Clave analítica de la lectura en cartulina de á cuartilla:* 3 cuartos.

9 *Clave analítica de la lectura en cuartilla de papel regular:* 2 cuartos.

10 *Reglas generales para aprender á leer, un librito en* 16.º*:* 2 cuartos.

11 *Instruccion práctica para enseñar á leer por el nuevo metodó contenido en la Teoría de la Lectura:* 4 cuartos.

12 *La misma instruccion práctica en letra tan diminuta, que se caracteriza con el nombre de* microscópica: 2 cuartos.

13 *Coleccion, en librito, de la clave y reglas de leer con la instruccion al respaldo de la clave:* 4 cuartos.

15 *Teoría de la Lectura* (segunda edicion): 4 rs.

16 *Modo de poner en ejecucion la Teoría de la Lectura:* 6 rs.

17 *Idéas primarias de los números:* 4 rs.

18 *Descripcion de los nuevos aparatos ensayados á presencia de S. M. Nuestra Escelsa Reina Gobernadora,*

y cuatro de los Excelentísimos Sres. Secretarios del Despacho, para facilitar las principales dificultades de la escritura, con las muestras correspondientes á este sistema: 4 rs.

19 *Muestras sueltas para escribir por este sistema:* 2 rs.

20 *Los dos aparatos para vencer las dificultades de la escritura:* 60 *rs.*

21 *Nociones geográficas y astronómicas para comprender la nueva division del territorio español:* 4 *rs.*

22 *Aritmética de niños escrita para uso de las escuelas del Reino:* 4 rs.

23 *Goemetria de niños escrita para uso de las escuelas:* 8 rs.

24 *Exámenes celebrados el dia* 27 *de abril de* 1834, *cumpleaños de Nuestra Excelsa Reina Gobernadora, en las Escuelas Normales, etc.* 1 real.

25 *Complemento de la Aritmética de Niños.* 4 rs.

OBRAS CIENTIFICAS.

26 *Tratado Elemental de Matemáticas, cinco volúmenes en cuarto;* á saber: tomo primero parte primera: Aritmética y Algebra 30 rs.

Tomo primero parte segunda: Geometría, Trigonometría rectilínea y Geometría práctica 30 rs.

Tomo segundo parte primera: Trigonometría Esférica, Aplicacion del Álgebra á la Geometría, Secciones Cónicas y Teoría general de las ecuaciones 30 rs.

Tomo segundo parte segunda: Funciones, Séries, Cálculo de las diferencias y el Diferencial é Integral 30 rs.

Tomo tercero parte primera: Mecánica dividida en sus cuatro tratados, á saber: Estática, Dinámica, Hidrostática é Hidrodinámica 30 rs.

27 *Compendio de Matemáticas puras y mistas, dos tomos en octavo prolongado:* 40 *rs.*

28 *Compendio de Mecánica práctica para uso de los niños, artistas y artesanos etc.* 14 rs.

29 *El plano de la bahía de Cádiz iluminado:* 6 rs.

30 *Memoria sobre la curvatura de las lineas etc.:* 14 rs.

31 *Tabla sinóptica del Arte militar:* 6 rs.

32 *Tratado sobre el movimiento y aplicaciones de las aguas,* tres tomos en 4.° 120 rs.

33 *Explicacion del mejor uso que tienen para la enseñanza cada una de estas obras:* 4 cuartos.

NOTA. Todas estas obras se hallarán, en *Madrid*

en las librerías de Sojo, Paz, Oréa y Razola; en *Alicante* en la de Carratalá; en *Almería* en la de Santa María; en *Badajoz* en la de la Viuda de Carrillo; en *Barcelona* en las de Piferrer, Sauri y Cerdá; en *Bilbao* en la de García; en *Burgos* en la de Arnaiz; en *Cádiz* en la de Hortal y Compañía; en *Córdoba* en la de Berard; en la *Coruña* en la de Calvete; en *Gerona* en la de Grases; en *Granada* en la de Saez Juano; en *Guadalajara* en casa de Don Julian Regino Ruiz; en *Jaen* en la de Cereceda; en *Leon* en la de Fernandez; en *Lugo* en la de Pujol; en *Málaga* en casa de D. Rafael Mitjana; en *Murcia* en la de Benedicto; en *Orense* en la de Gomez Pazo; en *Oviedo* en la de García Longoria; en *Palma de Mallorca* en la de Guasp; en *Pamplona* en la de Erasun y Rada; en *Salamanca* en la de Moran; en *San Sebastian* en la de Baroja; en *Santander* en la de Riesgo; en *Santiago* en la de Rey Romero; en *Segovia* en la de Don Domingo Alejandro; en *Sevilla* en la de Hidalgo y Compañía; en *Soria* en la de Ortega; en *Tarragona* en la de Berdeguer; en *Toledo* en la de Hernandez; en *Tortosa* en la de Puigrubi; en *Valencia* en la de Navarro; en *Valladolid* en la de Rodriguez; en *Vitoria* en la de Barrio; y en *Zaragoza* en la de Polo.

Todos los precios, que van anotados, son de las obras en rústica y en Madrid: los que los pidan en pasta, abonarán dos reales mas en tomo en 8.°, y seis en 4.°; y en las provincias se cargará algo por el porte y el derecho de puertas; y con el fin de facilitar la circulacion de estas obras, con ventaja individual de los espendedores, á los que tomen desde una docena á tres docenas, se les hará una rebaja de ocho y medio por ciento; á los que tomen de tres docenas á seis docenas, el diez por ciento; á los que adquieran un número mayor de ejemplares, se les rebajará el quince por ciento, si no llegan á mil, y á los que tomen desde mil en adelante, el veinticinco por ciento.